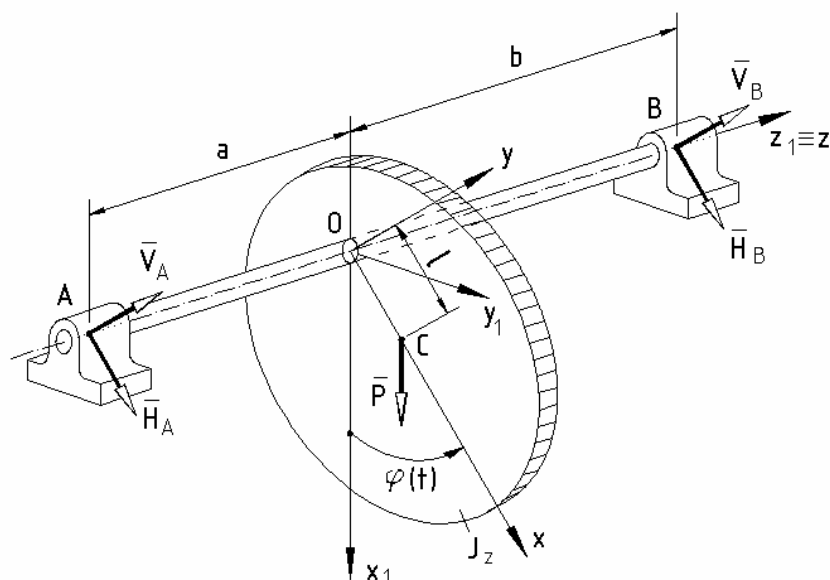


Ioan STRAT

# MECANICĂ

## PENTRU INGINERI CU APLICAȚII



EDITURA FUNDAȚIEI UNIVERSITARE  
"Dunărea de Jos" GALAȚI 2007

## CUPRINS

<b>INTRODUCERE</b> .....	7
Generalități.....	7
Scurt istoric al mecanicii.....	7
Obiectul mecanicii.....	10
Concepte fundamentale ale mecanicii clasice.....	10
Diviziunile mecanicii.....	11
Modele teoretice utilizate în mecanică.....	11
Principiile fundamentale ale mecanicii clasice.....	12
Sisteme și unități de măsură.....	13
<b>1. NOȚIUNI DE CALCUL VECTORIAL</b> .....	15
1.1. Mărimi scalare și mărimi vectoriale.....	15
1.2. Compunerea a doi vectori concurenți.....	15
1.3. Compunerea a “n” vectori concurenți.....	16
1.4. Descompunerea unui vector după două direcții concurente.....	17
1.5. Descompunerea unui vector după trei direcții concurente în spațiu.....	17
1.6. Produsul scalar a doi vectori.....	18
1.7. Produsul vectorial a doi vectori.....	18
1.8. Produsul mixt a trei vectori.....	19
1.9. Dublul produs vectorial a trei vectori.....	20
 <b>STATICA</b>	
<b>2. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE APLICATE RIGIDULUI</b> .....	21
2.1. Caracterul de vector alunecător al forței care acționează asupra rigidului.....	21
2.2. Momentul unei forțe în raport cu un punct.....	21
2.3. Momentul unei forțe în raport cu o axă.....	23
2.4. Cuplul de forțe.....	27
2.5. Sisteme de forțe echivalente. Operații elementare de echivalență.....	28
2.6. Reducerea unei forțe aplicată într-un punct al rigidului. Torsorul.....	29
2.7. Reducerea sistemelor de forțe aplicate rigidului. Torsorul de reducere. Variația torsorului cu punctul de reducere. Invarianti.....	29
2.8. Torsorul minim și axa centrală.....	31
2.9. Cazurile de reducere ale unui sistem de forțe.....	32
2.10. Reducerea sistemelor particulare de forțe.....	34
2.10.1. Reducerea sistemelor de forțe concurente.....	34
2.10.2. Reducerea sistemelor de forțe coplanare.....	35
2.10.3. Reducerea sistemelor de forțe paralele.....	36
Test de evaluare.....	41

<b>3. CENTRE DE GREUTATE (DE MASĂ).....</b>	<b>43</b>
3.1. Greutatea corpurilor.....	43
3.2. Centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale.....	49
3.3. Momente statice.....	44
3.4. Proprietățile centrului de greutate.....	44
3.5. Centrul de greutate al corpurilor omogene.....	46
Test de evaluare.....	50
<b>4. STATICA RIGIDULUI.....</b>	<b>52</b>
4.1. Echilibrul rigidului liber.....	52
4.2. Echilibrul rigidului supus la legături fără frecare.....	54
4.2.1. Generalități.....	54
4.2.2. Legăturile rigidului.....	54
4.2.2.1. Reazemul simplu.....	55
4.2.2.2. Articulația.....	56
4.2.2.2.1. Articulația sferică.....	56
4.2.2.2.2. Articulația cilindrică.....	57
4.2.2.3. Încastrarea.....	59
4.2.2.4. Prinderea cu fir.....	61
4.3. Echilibrul rigidului supus la legături cu frecare.....	64
4.3.1. Generalități asupra fenomenului de frecare.....	64
4.3.2. Frecarea de alunecare.....	66
4.3.3. Frecarea de rostogolire.....	67
4.3.4. Frecarea în lagărul radial (articulația cilindrică).....	69
4.3.5. Frecarea firelor.....	73
Test de evaluare.....	77
<b>5. STATICA SISTEMELOR MATERIALE.....</b>	<b>78</b>
5.1. Torsorul forțelor interioare.....	78
5.2. Teoreme și metode pentru studiul echilibrului sistemelor materiale.....	79
5.2.1. Metoda izolării elementelor.....	79
5.2.2. Teorema solidificării.....	79
5.2.3. Teorema echilibrului părților.....	80
5.3. Sisteme static determinate și sisteme static nedeterminate.....	81
Test de evaluare.....	87

## CINEMATICA

<b>6. CINEMATICA PUNCTULUI.....</b>	<b>88</b>
6.1. Noțiuni fundamentale.....	88
6.1.1. Legea de mișcare.....	88
6.1.2. Traectoria.....	88
6.1.3. Viteza.....	89
6.1.4. Accelerația.....	90
6.1.5. Viteza și accelerația unghiulară.....	91
6.2. Studiul mișcării punctului.....	92
6.2.1. Studiul mișcării în coordonate carteziane.....	92
6.2.2. Studiul mișcării în coordonate naturale.....	93

6.3. Mișcări particulare ale punctului.....	98
6.3.1. Mișcarea rectilinie.....	98
6.3.1.1. Mișcarea rectilinie uniformă.....	98
6.3.1.2. Mișcarea rectilinie uniform variată.....	99
6.3.2. Mișcarea circulară.....	100
6.3.2.1. Studiul mișcării în coordonate carteziane.....	100
6.3.2.3. Studiul mișcării în coordonate naturale.....	101
Test de evaluare.....	106
<b>7. CINEMATICA RIGIDULUI.....</b>	<b>107</b>
7.1. Mișcarea generală a rigidului.....	107
7.1.1. Mobilitatea rigidului.....	107
7.1.2. Distribuția de viteze.....	108
7.1.3. Distribuția de accelerații.....	109
7.2. Mișcări particulare ale rigidului.....	110
7.2.1. Mișcarea de translație.....	110
7.2.1.1. Distribuția de viteze.....	111
7.2.1.2. Distribuția de accelerații.....	111
7.2.2. Mișcarea de rotație (mișcarea rigidului cu axă fixă).....	112
7.2.3.1. Distribuția de viteze.....	113
7.2.3.2. Distribuția de accelerații.....	114
7.2.3.3. Transmiterea mișcării de rotație.....	115
7.2.3. Mișcarea plan paralelă.....	118
7.2.3.1. Distribuția de viteze.....	119
7.2.3.2. Centrul instantaneu de rotație.....	120
7.2.3.3. Distribuția de accelerații.....	122
7.2.3.4. Polul accelerațiilor.....	123
7.3. Mișcarea relativă a punctului.....	128
7.3.1. Derivata absolută și derivata relativă a unui vector.....	128
7.3.2. Definirea mișcărilor.....	129
7.3.3. Compunerea vitezelor.....	129
7.3.4. Compunerea accelerațiilor.....	130
Test de evaluare.....	132

## DINAMICA

<b>8. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL.....</b>	<b>133</b>
8.1. Dinamica punctului material în mișcare absolută.....	133
8.1.1. Noțiuni fundamentale.....	133
8.1.1.1. Lucrul mecanic.....	133
8.1.1.2. Funcția de forță.....	134
8.1.1.3. Puterea.....	135
8.1.1.4. Randamentul.....	136
8.1.1.5. Impulsul.....	136
8.1.1.6. Momentul cinetic.....	136
8.1.1.7. Energia mecanică.....	137
8.1.2. Ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului material.....	138
8.1.2.1. Generalități.....	138
8.1.2.2. Ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului material liber.....	138
8.1.2.3. Ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului material supus la	

legături.....	141
8.1.3. Teoreme generale în dinamica punctului material.....	141
8.1.3.1. Teorema impulsului.....	141
8.1.3.2. Teorema momentului cinetic.....	142
8.1.3.3. Teorema energiei cinetice.....	143
8.2. Dinamica punctului material în mișcare relativă.....	148
8.2.1. Legea fundamentală în mișcarea relativă.....	148
8.2.2. Sisteme inerțiale.....	148
8.2.3. Repausul relativ.....	149
Test de evaluare.....	151
<b>9. DINAMICA SISTEMELOR MATERIALE ȘI A RIGIDULUI.....</b>	<b>153</b>
9.1. Noțiuni fundamentale.....	153
9.1.1. Momente de inerție masice.....	153
9.1.1.1. Definiții.....	153
9.1.1.2. Relații între momentele de inerție.....	155
9.1.1.3. Raza de inerție.....	155
9.1.1.4. Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele.....	156
9.1.1.5. Variația momentelor de inerție în raport cu axe concurente....	157
9.1.1.6. Direcții principale de inerție. Momente principale de inerție. Proprietăți.....	159
9.1.2. Lucrul mecanic elementar al unui sistem de forțe care acționează asupra rigidului.....	163
9.1.3. Impulsul.....	164
9.1.4. Momentul cinetic.....	165
9.1.5. Energia cinetică.....	168
9.2. Teoreme generale în dinamica sistemelor materiale și a rigidului.....	170
9.2.1. Teorema impulsului.....	170
9.2.1.1. Teorema mișcării centrului de masă.....	171
9.2.2. Teorema momentului cinetic.....	172
9.2.3. Teorema energiei cinetice.....	174
Test de evaluare.....	183
<b>BIBLIOGRAFIE.....</b>	<b>184</b>

## INTRODUCERE

### GENERALITĂȚI

*Materia, mișcarea, spațiul și timpul* fac parte din noțiunile cele mai generale ale cunoașterii umane.

*Materia* este categoria filozofică care desemnează realitatea obiectivă, dată omului prin simțurile sale.

Prima modalitate de existență a materiei, sesizată de cunoașterea umană este *substanța*, aspectul ei cantitativ fiind *masa*. Substanța are o structură discretă fiind constituită din particule (electroni, protoni, neutroni) care formează ansambluri relativ stabile, numite corpuri.

O altă formă de existență a materiei este *câmpul fizic* (gravitațional, electromagnetic) conceput ca un mediu material continuu, aspectul cantitativ fiind caracterizat de *intensitatea câmpului*.

*Mișcarea* ca mod de existență a materiei cuprinde toate schimbările și transformările care au loc în univers. Mișcarea este concepută în *spațiu și timp* care sunt forme fundamentale, universale și obiective de existență a materiei.

*Spațiul* este o reprezentare generalizată a dimensiunilor corpurilor și a distanțelor dintre ele.

*Timpul* reprezintă imaginea generalizată a intervalelor dintre evenimente și a duratei fenomenelor.

### SCURT ISTORIC AL MECANICII

Ca știință, *Mecanica* apare odată cu acumularea și generalizarea experienței în epoca creerii primelor mijloace de producție. În primul rând a apărut *Statica*, dezvoltarea ei fiind legată de arta construcțiilor din antichitate.

*Aristotel* (384 – 322 î.H) a făcut multe observații juste asupra Staticii, îndeosebi asupra echilibrului, fiind preocupat de problema căderii verticale a corpurilor grele deși a tratat-o metafizic, elaborând o teorie după care “*corpul tinde spre locul său din natură*”. Tot el este primul filozof care abordează problema relativității mișcării.

*Arhimede* (287 – 212 î.H), mare geometru și mecanician, adevăratul întemeietor al Staticii rezolvă aproape toate problemele mecanicii care s-au pus în timpul său. În lucrările sale, “*Despre pârgii*”, “*Cartea reazemelor*” și “*Despre echilibrul suprafețelor*” dă teoria pârgiilor, rezolvă echilibrul sistemului format din două greutate suspendate pe o bară care se poate roti în jurul unui punct, elaborează regulile compunerii și descompunerii forțelor paralele, dă definiția centrului de greutate, stabilește unele legi de bază ale hidrostaticii și face referiri la ceea ce mai târziu va fi numit momentul forțelor.

În timpul Renașterii, odată cu înflorirea artelor și a celorlalte științe, *Mecanica* ia un avânt considerabil, făcându-se saltul de la Statică la *Dinamică*, studiul mișcării și al forțelor fiind în prim plan.

Marelui învățat și artist *Leonardo da Vinci* (1452 – 1518) îi datorează Mecanica, multe dintre ideile originale și îndrăznețe care i-au trasat căile de dezvoltare în viitor. Leonardo da Vinci execută primele cercetări experimentale asupra căderii libere a unui corp greu, introduce noțiunea de moment sub denumirea de “*momento*” sau pârghie potențială. La Leonardo da Vinci găsim unele indicații cu privire la principiul deplasărilor virtuale, legile echilibrului, egalitatea acțiunii cu reacțiunea, etc.; el studiază ciocnirile și stabilește unele reguli privitoare la frecare.

Evenimentul cel mai revoluționar al acestei epoci îl constituie apariția concepției lui *N. Copernic* (1473 – 1543) asupra sistemului heliocentric și tot acum apar lucrările lui *Johan Kepler* (1571 – 1630) cu privire la mișcarea planetelor în jurul Soarelui – celebrele trei legi ale lui Kepler.

Întreaga epocă e dominată de lucrările lui *Galileo Galilei* (1564 – 1642), unul din cei mai mari învățați ai epocii, luptător neînfricat împotriva învățăturii geocentriste și a scolasticii, descoperitor a multor legi de bază ale Mecanicii clasice. Galileo Galilei formulează noțiunile principale ale *Cinematicii* (viteza și accelerația) și stabilește formula căderii corpurilor; introduce noțiunea de forță ca agent mecanic și emite ideea relativității mișcării. Se poate spune că istoria Dinamicii începe de la Galilei. El formulează legea inerției aproape sub forma în care este cunoscută astăzi, teoria mișcării corpului greu pe un plan înclinat, legile mișcării corpului lansat. Sub forma “*regulii de aur*” a Mecanicii, el arată în ceea ce privește mașinile mecanice, cât se câștigă în forță, se pierde în viteză.

*Isaac Newton* (1643 – 1727) în lucrarea sa fundamentală “*Principiile matematice ale filozofiei naturale*” a formulat cele trei principii fundamentale ale Mecanicii clasice pe a căror bază se pot studia mișcările tuturor corpurilor, inclusiv mișcarea corpurilor cerești. Newton descoperă legea atracției universale, a studiat și descoperit legile fundamentale ale opticii, a pus bazele calculului infinitezimal (diferențial și integral).

*V. Varignon* (1654 – 1722) este cunoscut prin metodele sale geometrice aplicate în mecanică, prin definirea completă a noțiunii de moment și prin teorema momentelor.

*L. Euler* (1707 – 1783) a dezvoltat dinamica punctului material utilizând calculele analitice și diferențiale. El este creatorul Mecanicii corpului solid, studiind primul, metoda mișcării corpului solid, în special a solidului cu un punct fix, cu ajutorul celor trei unghiuri cunoscute sub numele de *unghiurile lui Euler*. El este fondatorul Hidrodinamicii și al Teoriei stabilității barelor elastice.

*M. L. Lomonosov* (1711 – 1765) este primul care formulează principiul conservării energiei, studiază problema interacțiunii între corpuri, propagarea căldurii, etc.

Spre mijlocul secolului al XVIII-lea încep să fie formulate și *principiile variaționale* ale Mecanicii.

*P. Maupertuis* (1698 – 1759) formulează în 1744 *Principiul minimei acțiuni*, pe care îl aplică la explicarea legilor reflexiei și refracției luminii și la teoria ciocnirilor. Demonstrația matematică a acestui principiu a fost dată însă

de Euler, iar generalizarea a fost făcută într-o primă formă de Lagrange și în formă completă de Jukovski.

*J. D'Alembert* (1717 – 1783) publică “*Traité de Dynamique*” unde este formulată celebra sa *metodă cinetostatică* utilizată la rezolvarea problemelor de dinamică.

*J. L. Lagrange* (1736 – 1813) a fost acela care a dezvoltat însă considerabil partea teoretică a Mecanicii, îndeosebi în lucrarea sa “*Mecanica analitică*”. Lagrange a creat *Mecanica analitică* pe baza principiului deplasărilor virtuale, încercând să demonstreze analitic, atât cât era posibil, *Principiul deplasărilor virtuale*. El a demonstrat analitic *Principiul d'Alembert* și a rezolvat problema oscilațiilor mici ale unui sistem de corpuri.

*M. V. Ostrogradski* (1801 – 1861) studiază legăturile dependente de timp, introduce noțiunea de legături exprimate analitic prin inegalități și aplică pentru astfel de legături, principiul deplasărilor virtuale. Ostrogradski a dat o nouă formă ecuației generale a Dinamicii, ecuație care integrată în raport cu timpul, conduce la expresia cea mai generală a *Principiului Hamilton-Ostrogradski*.

*W. R. Hamilton* (1805 – 1865) aplică calculul variațional în Mecanică și formulează principiul care-i poartă numele.

*Albert Einstein* (1879 – 1955) a arătat că se poate construi o teorie fizică, perfect consecventă considerând rezultatul experienței lui Michelson (constanta vitezei de propagare a luminii în vid, indiferent de sistemul de referință) ca un principiu. Acceptarea acestui principiu cerea în schimb să se renunțe la noțiunile de spațiu absolut și timp absolut ale mecanicii newtoniene. În cadrul noii teorii, denumită de el *teoria relativității*, distanțele și duratele erau relative, depinzând de sistemul de referință în care erau măsurate. Totul se desfășoară într-o varietate cu patru dimensiuni, trei dimensiuni fiind spațiale și una temporală, cunoscută sub numele de *universul lui Minkowski*, matematician lituanian care a dat această interpretare geometrică, teoriei relativității. Unul dintre rezultatele teoriei relativității îl reprezintă legea de variație a masei în funcție de viteză.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

unde  $m_0$  este masa de repaus,  $v$  este viteza și  $c$  reprezintă viteza de propagare a luminii în vid.

Această lege a dat naștere multor discuții filozofice, deoarece pornind de la definiția masei dată de Newton, ca fiind o măsură a cantității de materie, rezulta că materia se putea crea sau distruge după cum viteza  $v$  a corpului creștea sau scădea. A trebuit corectată și această definiție a lui Newton, în sensul că masa este doar o măsură a inerției corpului și nu a cantității de materie. De remarcat că, deși ecuațiile mecanicii relativiste sunt diferite de ecuațiile mecanicii newtoniene, tind către acestea când vitezele relative ale corpurilor sunt neglijabile în raport cu viteza de propagare a luminii în vid.

În țara noastră, trebuie să menționăm pentru activitatea lor, în domeniul Mecanicii teoretice, pe *Spiru Haret* (1851 – 1912), *Andrei Ioachimescu* (1868 –



1913) și *Dimitrie Pompei* (1873 – 1954) care au lăsat importante studii de Mecanică teoretică iar în cel al Mecanicii aplicate pe *Anghel Saligny* (1854 – 1925), *Ion Ionescu* (1870 – 1946), *G. E. Filipescu* (1885 – 1937), valoroși ingineri care au executat importante lucrări ingineresti și au lăsat studii de seamă în domeniul mecanicii teoretice și aplicate.

## OBIECTUL MECANICII

*Mecanica* este știința care studiază una din cele mai simple forme de mișcare a materiei cunoscută sub numele de *mișcare mecanică*.

*Mișcarea mecanică se definește ca modificare a poziției unui corp sau a unei părți a acestuia, în raport cu un alt corp considerat reper sau sistem de referință.*

*Mișcarea mecanică raportată la un sistem de referință fix se numește mișcare absolută iar cea raportată la un sistem de referință mobil se numește mișcare relativă.*

*Repausul* este starea unui corp sau a unor sisteme de corpuri a căror poziții, față de un sistem de referință rămân neschimbate.

S-au întâmpinat mari dificultăți în găsirea unor sisteme de referință absolute. Începând cu *sistemul geocentric* al lui Ptolemeu care considera Pământul fix, continuând cu *sistemul heliocentric* al lui Copernic care considera Soarele fix, a fost acceptat, mai târziu, un nou sistem de referință (care constituie la ora actuală, cel mai preferabil reper), cu originea în centrul de masă al galaxiei din care face parte Soarele și axele orientate către stele extrem de îndepărtate, în raport cu care legile mecanicii se verifică experimental.

## CONCEPTE FUNDAMENTALE ALE MECANICII CLASICE

Primul model al mecanicii a fost definitivat de *Isaac Newton* în opera sa fundamentală "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", publicată în 1686 și reprezintă *mecanica clasică*. Mecanica clasică sau newtoniană studiază mișcarea corpurilor materiale macroscopice, având viteze mici în comparație cu viteza luminii. Noțiunile fundamentale ale mecanicii clasice - *spațiul*, *timpul* și *masa* - sunt considerate complet independente, iar proprietățile lor sunt absolute.

*Spațiul* este o reprezentare generalizată a dimensiunilor corpurilor, a pozițiilor reciproce și a distanțelor dintre ele. În mecanica clasică, spațiul este considerat *tridimensional*, *infinit*, *continuu*, *omogen* (diferite porțiuni ale acestuia nu se deosebesc între ele) și *izotrop* (proprietățile după diferitele direcții care pleacă din același punct nu se deosebesc între ele).

*Timpul* reflectă o formă obiectivă fundamentală de existență a materiei, care caracterizează durata și succesiunea fenomenelor și proceselor materiale. În mecanica clasică, timpul este *infinit*, *continuu*, *omogen*, *uniform crescător* și *irreversibil* (se scurge într-un singur sens și are numai valori pozitive).

*Masa* este o mărime fizică scalară strict pozitivă, care măsoară două proprietăți importante ale materiei, existentă sub formă de substanță: *inerția* și *câmpul atracției universale* (în particular, câmpul gravitațional).

*Inerția* este proprietatea materiei de a-și conserva starea de mișcare mecanică pe care o are la un moment dat.

*Câmpul atracției universale* se manifestă prin forța gravitației universale care se exercită între două corpuri materiale.

## DIVIZIUNILE MECANICII

După natura corpurilor a căror mișcare se studiază, mecanica se divide în *Mecanica corpurilor rigide* sau mecanica teoretică și *Mecanica corpurilor deformabile*: mecanica corpurilor elastice și plastice (Rezistența materialelor, Teoria elasticității și plasticității), *Mecanica corpurilor lichide și gazoase* (Hidromecanica și Aeromecanica).

În toate aceste ramuri ale mecanicii, noțiunile, principiile generale și legile fundamentale sunt aceleași, numai modul de utilizare diferă, după natura corpurilor cărora le sunt aplicate.

Din punct de vedere metodologic, mecanica teoretică se împarte în trei mari capitole distincte, a căror parcurgere succesivă este dictată mai mult de scopuri didactice.

*Statica* se ocupă cu studiul echilibrului corpurilor, studiind echilibrul sistemelor de forțe și reducerea acestor sisteme.

*Cinematica* studiază mișcarea corpurilor, fără să țină seama de forțele care le acționează și masa lor. Aceasta face un studiu geometric al mișcării.

*Dinamica* fiind capitolul cel mai complex, tratează mișcarea corpurilor ținând seama de forțele care acționează asupra lor și de masa acestora.

## MODELE TEORETICE UTILIZATE ÎN MECANICĂ

Pentru simplificarea studiului în mecanică, corpurile materiale se schematizează sub forma unor modele teoretice:

*Punctul material* este un punct geometric căruia i se atribuie masă. Acest model poate fi utilizat și în cazul corpului solid de dimensiuni mari, cu condiția ca forțele care îl acționează să fie concurente într-un singur punct.

*Continuu material* reprezintă modelul unui corp la care se admite că orice element de volum conține materie (în accepțiunea de substanță), adică are masă.

*Corpul solid rigid (rigidul)* este un model utilizat în mecanica clasică, reprezentând un continuu material nedeformabil.

*Sistemul material* reprezintă o mulțime de puncte materiale sau corpuri solide, în interacțiune mecanică.

Există și o altă clasificare a modelelor utilizate în mecanica teoretică, ținând seama de *forma corpurilor*:

*Linia materială* reprezintă modelul unui corp cu o singură dimensiune celelalte dimensiuni (ale secțiunii transversale) fiind neglijabile. Corpul definit de o linie geometrică cu masa distribuită în lungul acesteia este reprezentat de *bară* dacă este rigid sau de *fir* dacă este flexibil, inextensibil și torsionabil.

*Suprafața materială* reprezintă modelul unui corp cu două dimensiuni comparabile, cea de-a treia (grosimea) fiind neglijabilă. Corpul definit de o suprafață geometrică cu masa distribuită pe aceasta este reprezentată de *placă* dacă este rigidă sau de *membrană* dacă este flexibilă.

*Volumul material* reprezintă modelul unui corp cu trei dimensiuni comparabile ca mărime. Corpul definit de un volum cu masa distribuită se numește *bloc*.

## PRINCIPIILE FUNDAMENTALE ALE MECANICII CLASICE

Mecanica clasică se bazează pe un număr de legi sau principii fundamentale, numite și postulate sau axiome ale mecanicii clasice. Aceste principii fundamentale nu pot fi dovedite complet pe cale experimentală sau teoretică dar se verifică în toate împrejurările în care intervine aplicarea lor.

Isaac Newton a enunțat pentru prima oară în formă definitivă principiile mecanicii pe care le-a denumit *axiomele* sau *legile mișcării*.

### 1. Principiul inerției (Legea I-a)

*Un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atât timp cât nu intervin alte forțe care să-i modifice această stare.*

### 2. Principiul acțiunii forței (Legea a II-a)

*Variația mișcării este proporțională cu forța motoare imprimată și este dirijată după linia de acțiune a forței.*

Pornind de la acest principiu, Newton a stabilit *legea fundamentală a mecanicii*:

$$\overline{F} = m\overline{a}$$

### 3. Principiul acțiunii și al reacțiunii (Legea a III-a)

*La orice acțiune corespunde o reacțiune egală și contrară sau acțiunile reciproce a două puncte materiale sunt întotdeauna egale și de sens contrar.*

### 4. Principiul paralelogramului forțelor (Corolarul I)

*Dacă asupra unui punct material acționează simultan două forțe având direcții diferite, efectul este același ca și când asupra punctului ar acționa o forță unică numită rezultantă și care are ca mărime, direcție și sens, diagonala paralelogramului având drept laturi, forțele considerate.*

În enunțarea acestor legi, Newton a emis unele de ipoteze simplificatoare:

- noțiunea de corp se referă la punctul material
- mișcarea se raportează la un sistem de referință absolut și imobil
- în legea a II-a, masa este considerată constantă

- în legea a III-a, noțiunile de *acțiune* și *reacțiune* sunt convenționale întrucât este impropriu spus că forțele de acțiune și reacțiune își fac echilibru, ele acționând asupra a două puncte diferite.

## SISTEME ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Întrucât între mărimile fizice există o serie de relații, se poate alege un număr restrâns de mărimi fizice, independente numite *mărimi fundamentale*, în funcție de care se pot exprima celelalte mărimi numite *mărimi derivate*.

Mărimile fundamentale în mecanică fiind: *lungimea L*, *masa M* și *timpul T*, mărimile derivate se obțin din acestea cu ajutorul ecuației de dimensiuni:

$$[D] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$$

unde  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt numere pozitive, negative, întregi, fracționare sau nule.

Unitățile de măsură ale celor două categorii de mărimi se numesc *unități de măsură fundamentale* și *unități de măsură derivate*.

În țara noastră se utilizează *Sistemul internațional de unități de măsură (SI)* care are 7 *unități fundamentale*: *metrul (m)* pentru lungime, *kilogramul (kg)* pentru masă, *secunda (s)* pentru timp, *amperul (A)* pentru intensitatea curentului electric, *kelvinul (K)* pentru temperatura termodinamică, *candela (cd)* pentru intensitatea luminoasă și *molul (mol)* pentru cantitatea de substanță.

Unitățile de măsură fundamentale utilizate în mecanică sunt: *metrul, kilogramul și secunda*.

*Metrul* este lungimea egală cu 1650763,73 lungimi de undă în vid ale radiației ce corespunde tranziției atomului de *kripton 86* între nivelele  $2p_{10}$  și  $d_5$ .

*Kilogramul* este masa prototipului internațional de platină iridiată adoptat în anul 1889 de Conferința Generală de Măsură și Greutăți și păstrat la Sèvres.

*Secunda* este durata de 9192631770 perioade ale radiației corespunzătoare tranziției între cele două nivele hiperfine ale stării fundamentale ale atomului de *cesiu 133*.

Principalele unități de măsură derivate, utilizate în mecanică sunt: *newtonul (N)*, pentru forță, *joule-ul (J)*, pentru lucru mecanic, *wattul (W)*, pentru putere și *pascalul (Pa)*, pentru presiune.

*Newtonul (N)* reprezintă forța care imprimă unei mase de 1 kg, o accelerație de  $1 \text{ m/s}^2$ .

*Joule-ul (J)* reprezintă lucrul mecanic efectuat de o forță de 1 N care se deplasează cu 1 m pe propriul său suport.

*Wattul (W)* reprezintă lucrul mecanic de 1 J efectuat într-o secundă. Ca unitate tolerată este utilizat *calul putere (CP)*. Între cele două unități există relațiile:  $1 \text{ CP} = 75 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 75 \frac{9,81 \text{ N} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 736 \text{ W} = 0,736 \text{ kW}$ ;  $1 \text{ kW} = \frac{1}{0,736} \text{ CP} = 1,36 \text{ CP}$

*Pascalul (Pa)* reprezintă presiunea exercitată de 1 N pe  $1 \text{ m}^2$ .

Multiplii și submultiplii unităților de măsură sunt dați în *Tabelul 1.1*.

Principalele mărimi utilizate în mecanică sunt date în *Tabelul 1.2*

Tabelul 1.1

Submultiplii			Multiplii		
Prefixul	Simbolul prefixului	Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbolul prefixului	Factorul de multiplicare
deci	$d$	$10^{-1}$	deca	$da$	$10^1$
centi	$c$	$10^{-2}$	hecto	$h$	$10^2$
mili	$m$	$10^{-3}$	kilo	$k$	$10^3$
micro	$\mu$	$10^{-6}$	mega	$M$	$10^6$
nano	$n$	$10^{-9}$	giga	$G$	$10^9$
pico	$p$	$10^{-12}$	tera	$T$	$10^{12}$
femto	$f$	$10^{-15}$	peta	$P$	$10^{15}$
atto	$a$	$10^{-18}$	exa	$E$	$10^{18}$

Tabelul 1.2

Mărimea	Simbolul	Ecuția de definiție	Dimensiunile în SI	Unitatea de măsură în SI
Lungimea	$l$	-	L	m
Masa	$m$	-	M	kg
Timpul	$t$	-	T	s
Aria	$A$	$A = l^2$	$L^2$	$m^2$
Volumul	$V$	$V = l^3$	$L^3$	$m^3$
Unghiul plan	$\alpha$	$\alpha = l/R$	-	-(rad)
Perioada	$T$	$T = 2\pi/\omega$	T	s
Frecvența	$f$	$f = 1/T$	$T^{-1}$	Hz
Viteza	$v$	$\bar{v} = \dot{\vec{r}}$	$LT^{-1}$	m/s
Accelerația	$a$	$\bar{a} = \ddot{\vec{r}}$	$LT^{-2}$	$m/s^2$
Viteza unghiulară	$\omega$	$\omega = \dot{\theta}$	$T^{-1}$	$s^{-1}$
Accelerația unghiulară	$\varepsilon$	$\varepsilon = \ddot{\theta}$	$T^{-2}$	$s^{-2}$
Masa specifică	$\rho$	$\rho = m/V$	$L^{-3}M$	$kg/m^3$
Greutatea specifică	$\gamma$	$\gamma = G/V$	$L^{-2}MT^{-2}$	$N/m^3$
Momentul de inerție	$J$	$J = \sum m_i l_i^2$	$L^2M$	$kgm^2$
Forța	$F$	$\bar{F} = m\bar{a}$	$LMT^{-2}$	N
Momentul forței	$M$	$\bar{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	$L^2MT^{-2}$	Nm
Impulsul	$H$	$\bar{H} = m\bar{v}$	$LMT^{-1}$	$kgm/s$
Momentul cinetic	$K$	$\bar{K} = \vec{r} \times \vec{H}$	$L^2MT^{-1}$	$kgm^2/s$
Energia cinetică	$E$	$E = mv^2/2$	$L^2MT^{-2}$	J
Lucrul mecanic	$L$	$L = \int \vec{F} d\vec{r}$	$L^2MT^{-2}$	J
Puterea	$P$	$P = dL/dt$	$L^2MT^{-3}$	W
Percuția	$P$	$\bar{P} = \int \vec{F} dt$	$LMT^{-2}$	Ns
Presiunea	$p$	$F/A$	$L^{-1}MT^{-2}$	Pa

## 1. NOȚIUNI DE CALCUL VECTORIAL

### 1.1. MĂRIMI SCALARE ȘI MĂRIMI VECTORIALE

Mărimile care sunt complet determinate prin valoarea lor numerică (pozitivă sau negativă) se numesc *mărimi scalare* sau *scalari*.

Mărimile care sunt complet determinate prin valoarea lor numerică, prin direcție și sens se numesc *mărimi vectoriale* sau *vectori*.

Vectorul reprezentat prin segmentul de dreaptă orientat se numește *vector liber*. În cazul când pentru definirea vectorului este necesară precizarea suportului, acesta se numește *vector alunecător*; dacă este necesară și precizarea punctului de aplicație, acesta se numește *vector legat*.

### 1.2. COMPUNEREA A DOI VECTORI CONCURENȚI

Considerând doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  cu originea în punctul  $O$  și unghiul dintre suporturile celor doi vectori,  $\alpha$ , suma sau rezultanta celor doi vectori este vectorul  $\vec{c}$ , definit ca mărime direcție și sens de diagonala paralelogramului construit cu vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , ca laturi (fig.1.1.a).

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (1.1)$$

Mărimea vectorului rezultat este:

$$|\vec{c}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \quad (1.2)$$

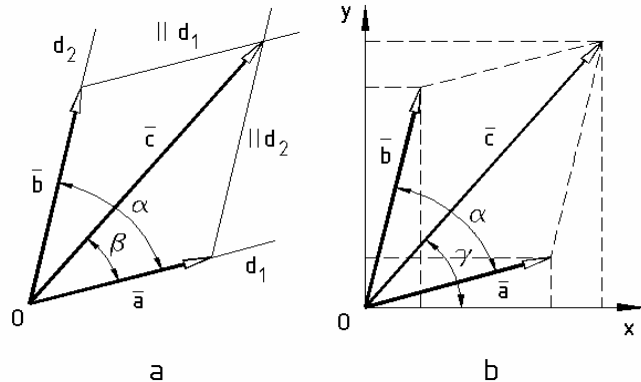


Fig. 1.1

Considerând ca referință, suportul vectorului  $\vec{a}$ , direcția vectorului rezultat este definită de unghiul  $\beta$ :

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}} \quad (1.3)$$

*Expresia analitică.* Considerând că vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  definesc planul  $Oxy$ , vectorul rezultat  $\vec{c}$  va fi situat în același plan, cei trei vectori putând fi exprimați prin proiecții pe axele sistemului menționat, (fig.1.1.b):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}; \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}; \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} \quad (1.4)$$

Conform relației (1.1) putem scrie:

$$c_x \bar{i} + c_y \bar{j} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j}) + (b_x \bar{i} + b_y \bar{j}) \quad (1.5)$$

Rezultă componentele pe axe ale vectorului rezultat  $\bar{c}$  :

$$c_x = a_x + b_x; \quad c_y = a_y + b_y \quad (1.6)$$

Mărimea vectorului rezultat este:

$$|\bar{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2} \quad (1.7)$$

iar direcția este dată de unghiul  $\gamma$  dintre suportul vectorului rezultat și axa  $Ox$ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{c_y}{c_x} = \frac{a_y + b_y}{a_x + b_x} \quad (1.8)$$

### 1.3. COMPUNEREA A “n” VECTORI CONCURENȚI

Regula paralelogramului poate fi extinsă la compunerea unui număr oarecare de vectori concurenți  $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n$ , ajungându-se la o construcție grafică numită *regula poligonului vectorilor*, laturile acestuia fiind vectorii din sistem. O latură  $\bar{V}_i$  a poligonului se obține prin construirea unui vector echipolent cu vectorul  $\bar{V}_i$  având ca origine, extremitatea vectorului  $\bar{V}_{i-1}$  și ca extremitate, originea vectorului  $\bar{V}_{i+1}$ .

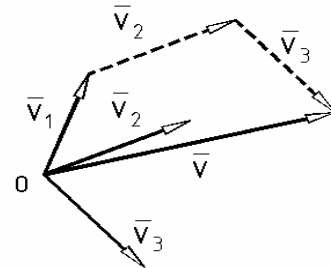
Rezultanta sistemului de vectori este definită ca suma vectorială a vectorilor  $\bar{V}_i$ :

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n = \sum_{i=1}^n \bar{V}_i \quad (1.9)$$

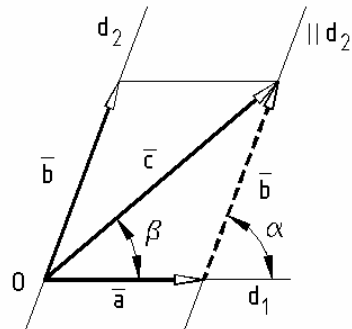
Construcția grafică reprezintă segmentul de dreaptă care unește originea primului vector  $\bar{V}_1$ , cu extremitatea ultimului vector  $\bar{V}_n$  din acest poligon (fig.1.2.a).

Regula poligonului, pentru cazul particular de compunere a doi vectori concurenți se numește *regula triunghiului* (fig.1.2.b).

*Expresia analitică.* Suporturile vectorilor din sistem fiind orientate în spațiu se va considera un sistem de axe cartezian triortogonal  $Oxyz$  față de care vor fi exprimate componentele pe axe ale acestor vectori (fig.1.2.c). Notând proiecțiile pe axe ale vectorului  $\bar{V}_i$  cu  $V_{ix}, V_{iy}, V_{iz}$  și ale vectorului



a



b

Fig.1.2

rezultant  $\bar{V}$ , cu  $V_x, V_y, V_z$ , conform relației (1.9) se scrie:

$$V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} = \sum_{i=1}^n (V_{ix} \bar{i} + V_{iy} \bar{j} + V_{iz} \bar{k}) \quad (1.10)$$

Analog raționamentului anterior, rezultă valorile componentelor pe axe ale vectorului rezultat:

$$\begin{cases} V_x = \sum_{i=1}^n V_{ix} \\ V_y = \sum_{i=1}^n V_{iy} \\ V_z = \sum_{i=1}^n V_{iz} \end{cases} \quad (1.11)$$

Mărimea vectorului rezultat este:

$$|\bar{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (1.12)$$

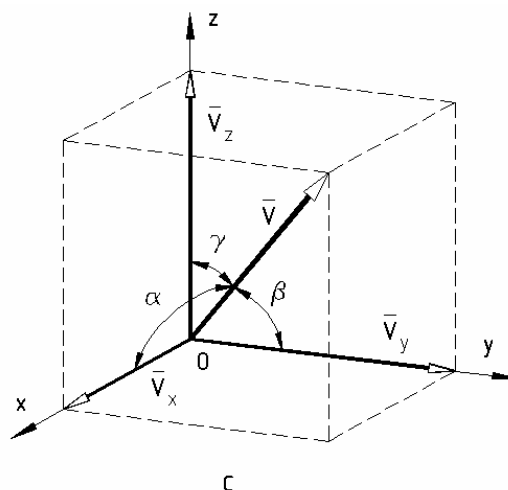


Fig. 1.2

iar direcția dată prin cosinusurile directoare:

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{|\bar{V}|}, \quad \cos \beta = \frac{V_y}{|\bar{V}|}, \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{|\bar{V}|} \quad (1.13)$$

#### 1.4. DESCOMPUNEREA UNUI VECTOR DUPĂ DOUĂ DIRECȚII CONCURENTE

Descompunerea unui vector  $\bar{V}$  după două direcții concurente  $d_1$  și  $d_2$  înseamnă determinarea sistemului de vectori concurenți  $\bar{V}_1$  și  $\bar{V}_2$  a căror rezultantă este vectorul  $\bar{V}$  sau determinarea componentelor  $\bar{V}_1$  și  $\bar{V}_2$  ale acestuia, pe cele două direcții  $d_1$  și  $d_2$ . Folosind regula paralelogramului, prin extremitatea vectorului  $\bar{V}$  se construiesc paralele la direcțiile  $d_1$  și  $d_2$ , punctele de intersecție cu aceste direcții definind extremitățile vectorilor  $\bar{V}_1$  și  $\bar{V}_2$ , ca în figura 1.3.

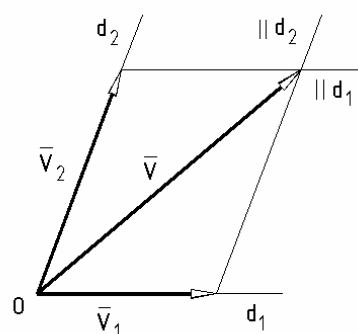


Fig. 1.3

#### 1.5. DESCOMPUNEREA UNUI VECTOR DUPĂ TREI DIRECȚII CONCURENTE ÎN SPAȚIU



Se aplică regula paralelogramului în două etape. În prima etapă se descompune vectorul  $\vec{V}$  după una din cele trei direcții, spre exemplu  $d_3$  și o direcție  $d_{1,2}$ , obținută ca intersecție dintre planul format de celelalte două direcții,  $d_1$  și  $d_2$  cu planul format de cea de-a treia direcție  $d_3$  și vectorul  $\vec{V}$ , rezultând componentele  $\vec{V}_3$  și  $\vec{V}_{1,2}$ .

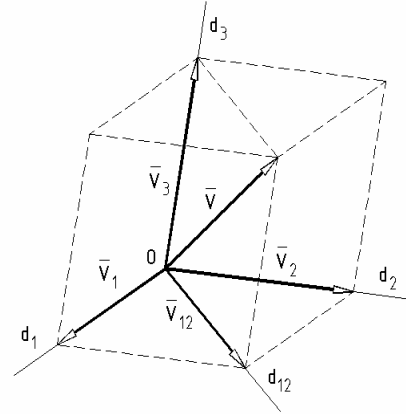


Fig. 1.4

În etapa a doua se descompune componenta  $\vec{V}_{1,2}$  după direcțiile  $d_1$  și  $d_2$  rezultând componentele  $\vec{V}_1$  și  $\vec{V}_2$ .

Vectorul  $\vec{V}$  reprezintă diagonala paralelipipedului având ca muchii, componentele  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  și  $\vec{V}_3$  (fig.1.4).

## 1.6. PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI

Numim produs scalar al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , notat  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , scalarul  $c$ :

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \quad (1.14)$$

unde  $\alpha$  este unghiul format de suporturile celor doi vectori.

Produsul scalar al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  poate fi exprimat ca produsul dintre mărimea unui vector și proiecția celuilalt pe acesta, și invers (fig.1.5).

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = |\vec{a}| pr_{\vec{a}} \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \alpha = |\vec{b}| pr_{\vec{b}} \vec{a} \end{cases} \quad (1.15)$$

*Expresia analitică.* Când vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt exprimați prin proiecțiile pe axele sistemului triortogonal  $Oxyz$ :

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{cases} \quad (1.16)$$

expresia analitică a produsului scalar devine:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.17)$$

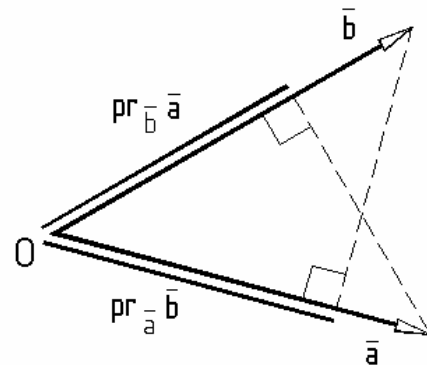


Fig. 1.5

## 1.7. PRODUSUL VECTORIAL A DOI VECTORI

Produsul vectorial al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este un vector  $\vec{c}$ , definit astfel:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (1.18)$$

Vectorul produs vectorial are următoarele caracteristici:

a. *mărimea* (modulul) vectorului:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha \quad (1.19)$$

reprezentând aria paralelogramului având ca laturi cei doi vectori, a căror suporturi formează unghiul  $\alpha$ .

b. *direcția* este dată de o dreaptă perpendiculară pe planul definit de cei doi vectori

c. *sensul* este dat de regula șurubului drept: sensul de înaintare al șurubului situat pe suportul vectorului  $\vec{c}$ , prin rotirea vectorului  $\vec{a}$  către vectorul  $\vec{b}$ , în sensul parcurgerii unghiului minim dintre cei doi vectori (fig.1.6).

*Expresia analitică.* Cei trei vectori putând fi exprimați prin proiecții pe axele sistemului triortogonal  $Oxyz$ :

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \\ \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \end{cases} \quad (1.20)$$

produsul vectorial este scris sub forma determinantului,

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

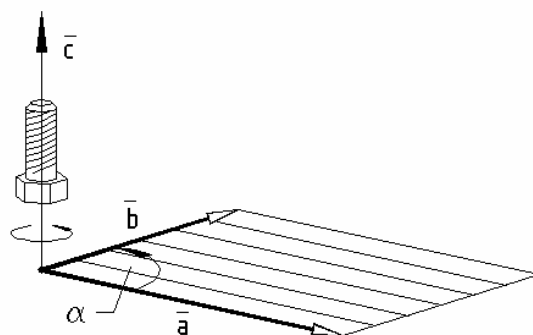


Fig. 1.6

prin dezvoltarea acestuia, rezultând componentele pe cele trei axe ale vectorului produs vectorial,  $\vec{c}$ :

$$\begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases} \quad (1.22)$$

## 1.8. PRODUSUL MIXT A TREI VECTORI

Produsul mixt a trei vectori,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  este prin definiție, produsul scalar dintre vectorul  $\vec{a}$  și vectorul produs vectorial,  $\vec{b} \times \vec{c}$  adică un scalar  $d$ :

$$d = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \quad (1.23)$$

Produsul mixt este un scalar și reprezintă volumul paralelipipedului având ca muchii mărimile celor trei vectori (fig.1.7).

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = |\bar{b} \times \bar{c}| \cdot pr_{\bar{b} \times \bar{c}} \bar{a} = A \cdot h = V \quad (1.24)$$

Întrucât  $|\bar{b} \times \bar{c}| = A$  reprezintă aria bazei paralelipipedului având ca muchii cei trei vectori iar  $pr_{\bar{b} \times \bar{c}} \bar{a} = h$  reprezintă înălțimea paralelipipedului.

*Expresia analitică.* Dacă vectorii sunt cunoscuți prin proiecțiile lor pe axele sistemului triortogonal  $Oxyz$  atunci produsul mixt (1.23) poate fi exprimat analitic:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.24)$$

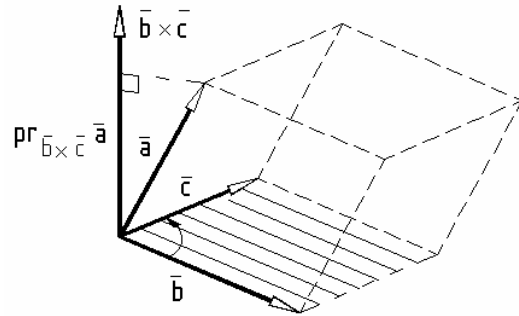


Fig. 1.7

## 1.9. DUBLUL PRODUS VECTORIAL A TREI VECTORI

Dublul produs vectorial al vectorilor  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  și  $\bar{c}$  este un vector  $\bar{d}$  egal cu produsul vectorial dintre vectorii  $\bar{a}$  și  $\bar{b} \times \bar{c}$  fiind situat în planul vectorilor  $\bar{b}$  și  $\bar{c}$ , conform relației:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c} \quad (1.25)$$

Dacă cei trei vectori sunt cunoscuți prin proiecțiile lor pe axele sistemului triortogonal  $Oxyz$  conform (1.20), atunci dublul produs vectorial se scrie:

$$\begin{aligned} \bar{d} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_z \bar{j} - a_y \bar{k} & a_x \bar{k} - a_z \bar{i} & a_y \bar{i} - a_x \bar{j} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \\ &= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)(b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) - \\ &\quad - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \cdot (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) = \\ &= (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c} \end{aligned}$$



# STATICA

## 2. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE APLICATE RIGIDULUI

### 2.1. CARACTERUL DE VECTOR ALUNECĂTOR AL FORȚEI CARE ACȚIONEAZĂ ASUPRA RIGIDULUI

Un corp se numește *rigid*, dacă distanța dintre două puncte oarecare ale corpului rămâne aceeași când asupra lui acționează un sistem de forțe finite, oricât de mari. Această condiție nu se realizează deoarece corpurile sunt deformabile. Materialele care intervin în structura corpurilor utilizate în tehnică (metal, lemn, etc.) sunt puțin deformabile, așa încât într-o primă aproximație, deformările lor pot fi neglijate, ajungând astfel la noțiunea de solid rigid.

Se consideră un rigid acționat în punctul  $A$ , de forța  $\vec{F}$  (fig.2.1.a). În punctul  $B$ , situat pe suportul forței  $\vec{F}$ , se introduc două forțe egale și de sens contrar,  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$ , ceea ce nu schimbă efectul forței  $\vec{F}$ , aplicată în punctul  $A$  (fig.2.1.b). Forța  $\vec{F}$  din  $A$  și forța  $-\vec{F}$  din  $B$  își anulează

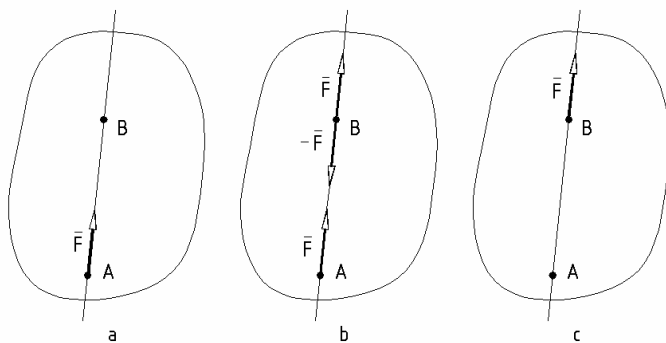


Fig. 2.1

efectul, astfel că asupra rigidului acționează numai forța  $\vec{F}$  aplicată în punctul  $B$  (fig.2.1.c). Rezultă că o forță  $\vec{F}$  poate fi deplasată pe propriul suport, fără ca efectul ei asupra rigidului să se modifice. Vectorul forță care acționează asupra rigidului are proprietatea de *vector alunecător*.

### 2.2. MOMENTUL UNEI FORȚE ÎN RAPORT CU UN PUNCT

Momentul unei forțe în raport cu un punct exprimă capacitatea forței de a roti corpul asupra căruia acționează în jurul unei axe care trece prin acest punct și este perpendiculară pe planul determinat de suportul forței și punctul respectiv (fig.2.2.a).

Momentul unei forțe  $\vec{F}$  în raport cu un punct  $O$  este produsul vectorial dintre vectorul de poziție  $\vec{r}$ , al punctului de aplicație  $A$ , al forței și forța  $\vec{F}$ .

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.1)$$

Conform proprietăților produsului vectorial, momentul  $\vec{M}_O(\vec{F})$  este un vector aplicat în punctul  $O$ , perpendicular pe planul definit de vectorii  $\vec{r}$  și  $\vec{F}$  (fig.2.2.b), al cărui sens este dat de regula șurubului drept (sensul de înaintare al șurubului așezat în punctul  $O$  pe suportul momentului  $\vec{M}_O$ , acționat de o cheie cu forța  $\vec{F}$  având ca braț, vectorul de poziție  $\vec{r}$ ), iar modulul dat de relația:

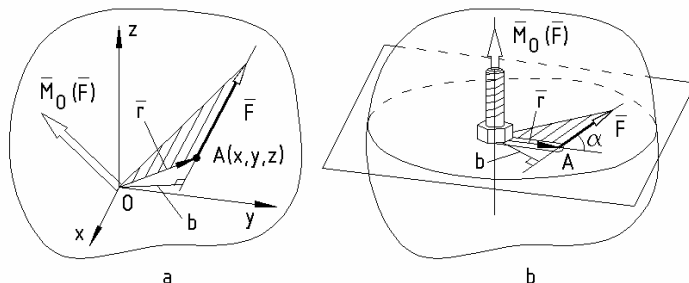


Fig. 2.2

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin(\vec{r}, \vec{F}) \quad (2.2)$$

sau punând în evidență distanța  $b$ , de la punctul  $O$ , la suportul forței  $\vec{F}$ , numit *brațul forței*:

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{F}| b = Fb \quad (2.3)$$

*Proprietăți:*

1. Momentul unei forțe în raport cu un punct este nul când suportul forței trece prin acel punct.
2. Momentul unei forțe în raport cu un punct nu se modifică dacă forța se deplasează pe propriul suport.

Considerând forța  $\vec{F}$  în două poziții,  $A$  și  $B$  (fig.2.3.a) și notând cu  $\vec{r}$ , respectiv  $\vec{r}'$ , vectorii de poziție ai punctelor  $A$  și  $B$ , momentul în raport cu punctul  $O$  al forței  $\vec{F}$  în cele două situații devine:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_A) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_B) = \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r} + \vec{AB}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

întrucât  $\vec{AB} \times \vec{F} = 0$ , vectorii  $\vec{AB}$  și  $\vec{F}$  fiind coliniari.

3. Momentul unei forțe în raport cu un punct este un *vector legat*, motiv pentru care se modifică la schimbarea polului.

Fie  $O$  și  $O'$ , punctele în raport cu care se calculează momentul forței  $\vec{F}$ .

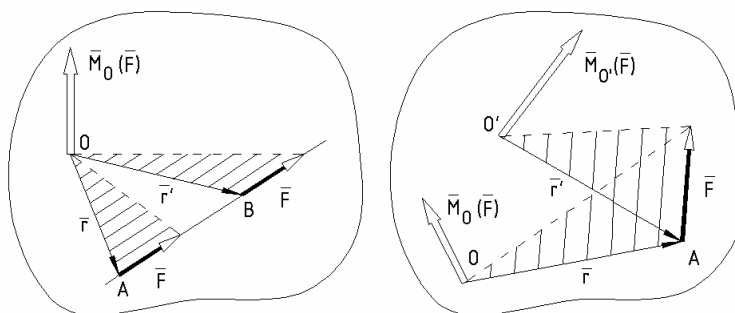


Fig. 2.3

$$\overline{M}_{O'}(\overline{F}) = \overline{r}' \times \overline{F} = (\overline{O'O} + \overline{r}) \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} + \overline{OO'} \times \overline{F} = \overline{M}_O(\overline{F}) - \overline{OO'} \times \overline{F} \quad (2.4)$$

Întrucât punctul  $O$  reprezintă originea sistemului, poziția tuturor celorlalte puncte se raportează la acest pol, motiv pentru care vectorul  $\overline{O'O} = -\overline{OO'}$ . Relația (2.4) exprimă *legea de variație a momentului la schimbare polului*.

*Expresia analitică.* Având expresiile analitice ale vectorului de poziție  $\overline{r}$  și ale forței  $\overline{F}$ :

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}; \quad \overline{F} = F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k} \quad (2.5)$$

rezultă expresia analitică a momentului forței  $\overline{F}$  în raport cu punctul  $O$ .

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

Proiecțiile momentului  $\overline{M}_O$  pe axele sistemului triortogonal  $Oxyz$  (care reprezintă momentul forței  $\overline{F}$  în raport cu axele:  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ) sunt:

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases} \quad (2.7)$$

### 2.3. MOMENTUL UNEI FORȚE ÎN RAPORT CU O AXĂ

Momentul unei forțe  $\overline{F}$  în raport cu o axă  $\Delta$  reprezintă proiecția pe acea axă a momentului forței  $\overline{F}$ , calculat în raport cu un punct arbitrar de pe axă.

Se consideră forța  $\overline{F}$ , aplicată în  $A$  și axa  $\Delta$ , caracterizată de versorul  $\overline{u}$  (fig.2.4.a). Dacă  $\alpha$  este unghiul dintre vectorul  $\overline{M}_O(\overline{F})$  și axa  $\Delta$ , în baza definiției, proiecția acestuia pe axa  $\Delta$  este:

$$M_\Delta(\overline{F}) = |\overline{M}_O(\overline{F})| \cos \alpha \quad (2.8)$$

Se poate demonstra că momentul  $M_\Delta(\overline{F})$  este egal cu produsul scalar dintre momentul  $\overline{M}_O(\overline{F})$  și versorul  $\overline{u}$  al axei  $\Delta$ .

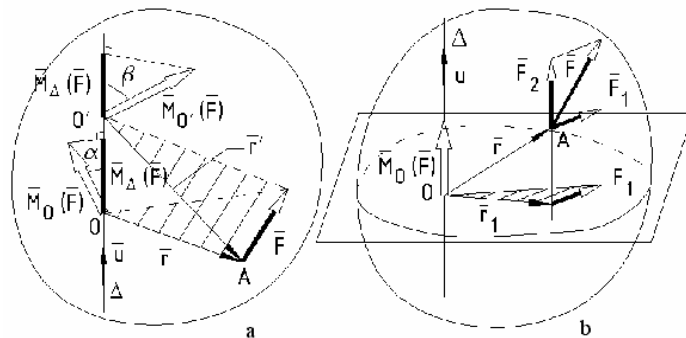


Fig. 2.4

$$\overline{M}_O(\overline{F}) \cdot \overline{u} = |\overline{M}_O(\overline{F})| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = |\overline{M}_O(\overline{F})| \cos \alpha = M_\Delta(\overline{F}) \quad (2.9)$$

Cum  $\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$ , rezultă:

$$M_{\Delta}(\bar{F}) = \bar{M}_0(\bar{F}) \cdot \bar{u} = (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} = (\bar{r}, \bar{F}, \bar{u}) \quad (2.10)$$

Momentul unei forțe în raport cu o axă este produsul mixt al vectorilor  $\bar{r}, \bar{F}, \bar{u}$ , care este un scalar. Dacă vectorul  $\bar{F}$  are sens de rotație în sensul pozitiv al axei  $\Delta$ , semnul scalarului  $M_{\Delta}(\bar{F})$  este pozitiv; dacă sensul de rotație al vectorului  $\bar{F}$  în jurul axei  $\Delta$  este contrar sensului pozitiv al axei, semnul scalarului  $M_{\Delta}(\bar{F})$  este negativ.

*Proprietăți:*

1. Poziția punctului de pe axa  $\Delta$ , față de care se calculează momentul  $M_{\Delta}(\bar{F})$  este arbitrară (fig.2.4.a).

Fie două puncte  $O$  și  $O'$  de pe axa  $\Delta$  față de care se calculează momentul  $M_{\Delta}(\bar{F})$  (fig.2.4.a).

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$$

$$M_{\Delta}(\bar{F}) = \bar{M}_0(\bar{F}) \cdot \bar{u} = (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u}$$

$$\bar{M}_{O'}(\bar{F}) = \bar{r}' \times \bar{F} = (\overline{O'O} + \bar{r}) \times \bar{F} = \overline{OO'} \times \bar{F} + \bar{r} \times \bar{F}$$

$$M'_{\Delta}(\bar{F}) = \bar{M}_{O'}(\bar{F}) \cdot \bar{u} = [(\overline{OO'} \times \bar{F}) + (\bar{r} \times \bar{F})] \cdot \bar{u}$$

$$= (\overline{OO'} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} + (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} = (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} = M_{\Delta}(\bar{F})$$

Produsul mixt  $(\overline{O'O} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} = 0$ , vectorul  $\overline{O'O}$  și versorul  $\bar{u}$  sunt coliniari.

2. Conform expresiei momentului  $M_{\Delta}(\bar{F})$ , dată de produsul mixt  $(\bar{r}, \bar{F}, \bar{u})$ , momentul unei forțe în raport cu o axă  $\Delta$  este nul dacă forța și axa sunt coplanare: concurente, paralele sau confundate.

În aplicații se folosește o altă definiție a momentului unei forțe în raport cu o axă: *momentul unei forțe  $\bar{F}$  în raport cu o axă  $\Delta$  este egal cu scalarul momentului proiecției forței  $\bar{F}$  într-un plan normal la axă, calculat în raport cu punctul în care axa intersectează planul* (fig.2.4.b).

Se descompune forța  $\bar{F}$  în componentele:  $\bar{F}_1$  reprezentând proiecția forței  $\bar{F}$  în planul normal la axa  $\Delta$  și  $\bar{F}_2$ , paralelă cu axa  $\Delta$ . Considerând proiecția punctului de aplicație  $A$ , al forței  $\bar{F}$  în planul normal la axă,  $A_1$  și proiecția vectorului de poziție  $\bar{r}$  al punctului de aplicație al forței  $\bar{F}$  în planul normal la axă,  $\bar{r}_1$  pot fi scrise relațiile:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2; \quad \bar{r} = \bar{r}_1 + \overline{A_1A} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} M_{\Delta}(\bar{F}) &= (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} = [(\bar{r}_1 + \overline{A_1A}) \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2)] \cdot \bar{u} = \\ &= (\bar{r}_1 \times \bar{F}_1) \cdot \bar{u} + (\bar{r}_1 \times \bar{F}_2) \cdot \bar{u} + (\overline{A_1A} \times \bar{F}_1) \cdot \bar{u} + (\overline{A_1A} \times \bar{F}_2) \cdot \bar{u} = \\ &= (\bar{r}_1 \times \bar{F}_1) \cdot \bar{u} = \bar{M}_O(\bar{F}_1) \cdot \bar{u} = \pm |\bar{r}_1 \times \bar{F}_1| \end{aligned} \quad (2.12)$$

$(\bar{r}_1 \times \bar{F}_2) \cdot \bar{u} = (\overline{A_1A} \times \bar{F}_1) \cdot \bar{u} = (\overline{A_1A} \times \bar{F}_2) \cdot \bar{u} = 0$ , vectorii fiind coplanari.

*Expresia analitică.* Exprimând sub formă analitică, vectorii  $\bar{r}, \bar{F}, \bar{u}$ :



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \quad (2.13)$$

expresia analitică a momentului forței  $\vec{F}$  în raport cu axa  $\Delta$ , devine:

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

**Aplicații. 1.** Asupra unui rigid acționează o forță  $\vec{P}$ , orientată după muchia  $FG$  a cubului din figura 2.5. Muchia cubului având lungimea  $a$  să se determine momentele acestei forțe în raport cu toate vârfurile cubului și să se reprezinte vectorii moment.

*Rezolvare.* Se vor calcula mărimile vectorilor moment ca produs dintre forță și brațul forței (metoda brațului), direcțiile și sensurile fiind indicate în figura 2.5.

$$|\vec{M}_O| = |\vec{OF} \times \vec{P}| = OG \cdot P = \sqrt{2}aP$$

$$|\vec{M}_A| = |\vec{AF} \times \vec{P}| = AF \cdot P = \sqrt{2}aP$$

$$|\vec{M}_B| = |\vec{BF} \times \vec{P}| = BF \cdot P = aP$$

$$|\vec{M}_C| = |\vec{CF} \times \vec{P}| = CG \cdot P = aP$$

$$|\vec{M}_D| = |\vec{DF} \times \vec{P}| = DG \cdot P = aP$$

$$|\vec{M}_E| = |\vec{EF} \times \vec{P}| = EF \cdot P = aP$$

$$|\vec{M}_F| = |\vec{M}_G| = 0$$

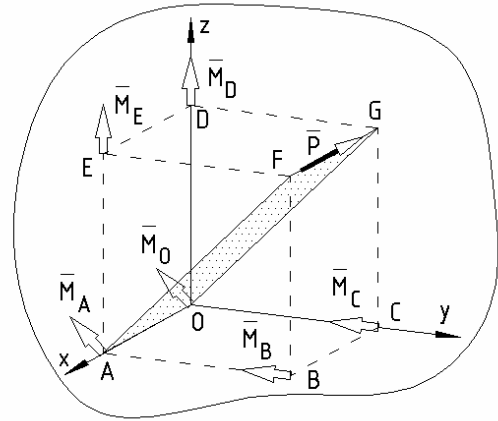


Fig. 2.5

Conform proprietății 1, momentul forței  $\vec{P}$  în raport cu punctele  $F$  și  $G$  este nul, întrucât suportul acesteia trece prin aceste puncte.

Pentru verificarea calculului momentelor se utilizează metoda analitică:

$$\vec{M}_O = \vec{OF} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & a \\ -P & 0 & 0 \end{vmatrix} = -aP\vec{j} + aP\vec{k} \quad \vec{M}_A = \vec{AF} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & a \\ -P & 0 & 0 \end{vmatrix} = -aP\vec{j} + aP\vec{k}$$

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{(-aP)^2 + (aP)^2} = \sqrt{2}aP$$

$$|\vec{M}_A| = \sqrt{(-aP)^2 + (aP)^2} = \sqrt{2}aP$$

$$\vec{M}_B = \vec{BF} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a \\ -P & 0 & 0 \end{vmatrix} = -aP\vec{j}$$

$$|\vec{M}_B| = aP$$

$$\vec{M}_D = \vec{DF} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ -P & 0 & 0 \end{vmatrix} = aP\vec{k}$$

$$|\vec{M}_D| = aP$$

$$\vec{M}_E = \vec{EF} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ -P & 0 & 0 \end{vmatrix} = aP\vec{k}$$

$$|\vec{M}_E| = aP$$

2. O forță  $\vec{F}$  de mărime  $|\vec{F}| = 9\text{ kN}$  acționează pe dreapta definită de segmentul  $AB$  și este orientată de la  $A$  către  $B$  (fig.2.6). Să se calculeze momentele forței  $\vec{F}$  în raport cu punctele  $O$ ,  $C$  și  $D$ , dacă punctele respective au următoarele coordonate exprimate în metri:  $A(7,4,2)$ ;  $B(0,0,6)$ ;  $C(1,2,0)$ ;  $D(0,4,8)$ .

Rezolvare. Pentru rezolvarea problemei este utilizată metoda analitică. Forța  $\vec{F}$  fiind un vector alunecător, punctul de aplicație al acesteia, situat pe segmentul  $AB$  se ia  $A$ . Cum expresiile momentului forței  $\vec{F}$  în raport cu cele trei puncte sunt:

$$\begin{cases} \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{r}_O \times \vec{F} \\ \vec{M}_C(\vec{F}) = \vec{CA} \times \vec{F} = \vec{r}_C \times \vec{F} \\ \vec{M}_D(\vec{F}) = \vec{DA} \times \vec{F} = \vec{r}_D \times \vec{F} \end{cases}$$

vectorii  $\vec{OA}$ ,  $\vec{CA}$ ,  $\vec{DA}$  și  $\vec{F}$  se vor exprima prin proiecții pe axe.

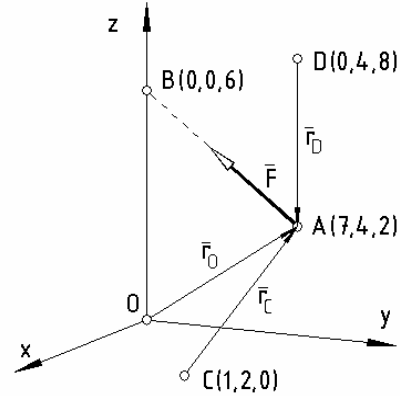


Fig. 2.6

$$\begin{cases} \vec{OA} = \vec{r}_O = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{CA} = \vec{r}_C = (x_A - x_C)\vec{i} + (y_A - y_C)\vec{j} + (z_A - z_C)\vec{k} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{DA} = \vec{r}_D = (x_A - x_D)\vec{i} + (y_A - y_D)\vec{j} + (z_A - z_D)\vec{k} = 7\vec{i} - 6\vec{k} \end{cases}$$

Versorul forței  $\vec{F}$  este versorul segmentului  $AB$ ,  $\vec{u}_{AB}$  și are expresia:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} = \frac{-7\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{7^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{1}{9}(-7\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k})$$

Forța  $\vec{F}$  poate fi scrisă sub forma:

$$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \vec{u}_{AB} = 9 \cdot \frac{1}{9}(-7\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}) = -7\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} \quad (\text{kN})$$

Vectorii moment și mărimile acestora devin:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_O \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 4 & 2 \\ -7 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 24\vec{i} - 42\vec{j}; \quad |\vec{M}_O(\vec{F})| = \sqrt{24^2 + 42^2} = 48,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\vec{M}_C(\vec{F}) = \vec{r}_C \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 2 \\ -7 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 16\vec{i} - 38\vec{j} - 10\vec{k}; \quad |\vec{M}_C(\vec{F})| = \sqrt{16^2 + 38^2 + 10^2} = 42,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\vec{M}_D(\vec{F}) = \vec{r}_D \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 0 & -6 \\ -7 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -24\vec{i} + 14\vec{j} - 28\vec{k}; \quad |\vec{M}_D(\vec{F})| = \sqrt{24^2 + 14^2 + 28^2} = 39,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3. Asupra unui corp acționează o forță  $\vec{Q}$  de mărime  $|\vec{Q}| = \sqrt{2}P$  și al cărei suport este diagonala feței superioare a cubului de muchie  $a$ , reprezentat în figura 2.7. Să se calculeze momentele acestei forțe în raport cu muchiile cubului și să se indice sensurile lor.

*Rezolvare.* Întrucât forța  $\bar{Q}$  și muchiile  $OD$ ,  $BF$ ,  $DE$ ,  $EF$ ,  $FG$  și  $DG$  definesc un plan, conform proprietății 2, momentele acestei forțe în raport cu muchiile respective sunt nule.

$$M_{OD} = M_{BF} = M_{DE} = M_{EF} = M_{FG} = M_{DG} = 0$$

Pentru determinarea momentului forței  $\bar{Q}$  în raport cu celelalte muchii ale cubului, calculul se va efectua tabelar, având în vedere modul de calcul pentru aplicații

Axa $\Delta$	Planul normal la axa $\Delta$	Punctul de intersecție axă-plan	Momentul $M_{\Delta}$
$OA$	ABFE	A	$M_{OA} = \bar{Q}''(EA) = aP$
$AB$	BCGF	B	$M_{AB} = -\bar{Q}'(FB) = -aP$
$CB$	ABFE	B	$M_{CB} = \bar{Q}''(FB) = aP$
$OC$	BCGF	C	$M_{OC} = -\bar{Q}'(GC) = -aP$
$AE$	DEFG	E	$M_{AE} = \bar{Q}(HE) = \sqrt{2}P \cdot a\sqrt{2} / 2 = aP$
$CG$	DEFG	F	$M_{CG} = -\bar{Q}(HG) = -\sqrt{2}P \cdot a\sqrt{2} / 2 = -aP$

Calculul pot fi verificate utilizând metoda analitică

$$M_{OA} = \bar{u}_{OA} \cdot \bar{M}_O = \bar{i} \cdot (\overline{OF} \times \bar{Q}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a & a \\ -P & -P & 0 \end{vmatrix} = aP$$

$$M_{AB} = \bar{u}_{AB} \cdot \bar{M}_A = \bar{j} \cdot (\overline{AF} \times \bar{Q}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & a \\ -P & -P & 0 \end{vmatrix} = -aP$$

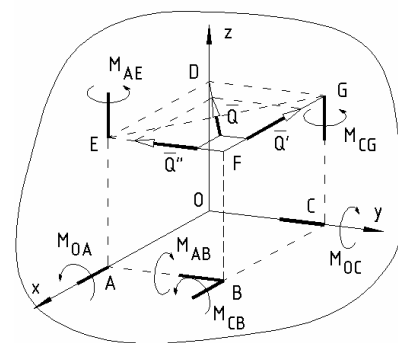


Fig. 2.7

$$M_{CB} = \bar{u}_{CB} \cdot \bar{M}_C = \bar{i} \cdot (\overline{CF} \times \bar{Q}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \\ -P & -P & 0 \end{vmatrix} = aP$$

$$M_{OC} = \bar{u}_{OC} \cdot \bar{M}_O = \bar{j} \cdot (\overline{OF} \times \bar{Q}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & a & a \\ -P & -P & 0 \end{vmatrix} = -aP$$

$$M_{AE} = \bar{u}_{AE} \cdot \bar{M}_A = \bar{k} \cdot (\overline{AF} \times \bar{Q}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & a \\ -P & -P & 0 \end{vmatrix} = aP$$

$$M_{CG} = \bar{u}_{CG} \cdot \bar{M}_C = \bar{k} \cdot (\overline{OF} \times \bar{Q}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & a \\ -P & -P & 0 \end{vmatrix} = -aP$$

## 2.4. CUPLUL DE FORȚE

*Cuplul de forțe reprezintă un sistem de două forțe egale și de sens contrar care acționează pe două suporturi paralele asupra aceluiași rigid (fig.2.8).*

Cuplul de forțe tinde să rotească rigidul în jurul unei axe perpendiculare pe planul definit de suporturile celor două forțe.

*Proprietăți:*

1. Proiecția unui cuplu pe orice axă este nulă. Se deduce că rezultanta cuplului de forțe este nulă.

Considerând axa de versor  $\vec{u}$ , se poate scrie:  $\vec{u} \cdot \vec{F} + \vec{u} \cdot (-\vec{F}) = 0$

2. Efectul cuplului de forțe aplicat unui rigid se măsoară prin *momentul cuplului*.

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}_A \times (-\vec{F}) + \vec{r}_B \times \vec{F} = \\ &= (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F}\end{aligned}\quad (2.15)$$

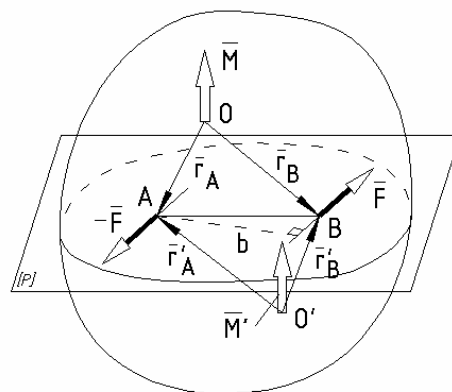


Fig. 2.8

Momentul cuplului de forțe este un vector perpendicular pe planul forțelor care formează cuplul, sensul fiind dat de regula produsului vectorial (șurubului drept) iar mărimea este dată de produsul dintre forță și brațul cuplului (distanța dintre forțele cuplului măsurată pe perpendiculara comună).

$$|\vec{M}| = |\vec{AB}| |\vec{F}| \sin(\angle \vec{AB}, \vec{F}) = Fb \quad (2.16)$$

3. Momentul cuplului de forțe este un *vector liber*, întrucât rămâne neschimbat, indiferent de punctul față de care se stabilește expresia sa. În raport cu un alt punct  $O'$ , expresia momentului devine:

$$\vec{M}' = \vec{r}'_A \times (-\vec{F}) + \vec{r}'_B \times \vec{F} = (\vec{r}'_B - \vec{r}'_A) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{M}$$

## 2.5. SISTEME DE FORȚE ECHIVALENTE. OPERAȚII ELEMENTARE DE ECHIVALENȚĂ

Întrucât în continuare vor fi studiate sisteme de forțe care acționează asupra rigidului, se pune problema determinării efectului mecanic al acestora, exercitat asupra diferitelor puncte ale rigidului. Este util deci, să se înlocuiască sistemele de forțe oarecare date, cu sisteme de forțe mai simple, care să producă în orice punct același efect mecanic.

Două sisteme de forțe care acționează asupra unui rigid și produc în orice punct același efect mecanic se numesc *sisteme echivalente*.

Pentru realizarea unor sisteme de forțe echivalente dar mai simple se aplică forțelor o serie de operații, astfel ca sistemul de forțe dat să rămână echivalent cu el însuși, numite *operații elementare de echivalență*.

1. O forță care acționează asupra rigidului poate fi deplasată pe propriul suport;
2. În sistemul de forțe se pot suprima sau introduce două forțe egale și direct opuse;

3. Mai multe forțe concurente pot fi înlocuite prin rezultanta lor sau o forță poate fi înlocuită prin componentele sale.

## 2.6. REDUCEREA UNEI FORȚE APLICATĂ ÎNTR-UN PUNCT AL RIGIDULUI. TORSORUL

Se consideră un rigid acționat de o forță  $\vec{F}$  în punctul  $A$ , al cărui vector de poziție în raport cu un punct  $O$  este  $\vec{r}$  (fig.2.9). A reduce această forță într-un punct oarecare  $O$ , înseamnă a determina efectul mecanic exercitat în  $O$ , de forța  $\vec{F}$ , aplicată în  $A$ .

Având în vedere operațiile de echivalență, se introduc în  $O$ , forțele  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$ . Forțele  $\vec{F}$  din  $A$  și  $-\vec{F}$  din  $O$  formează un cuplu al cărui moment este  $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$

Forța  $\vec{F}$  și cuplul de forțe reprezentat prin momentul  $\vec{M}_0$  se numesc *elemente de reducere* în  $O$  ale forței date. Ansamblul celor două elemente alcătuiesc *torsorul de reducere* în punctul  $O$  al forței  $\vec{F}$  aplicată în  $A$  și se notează:

$$\tau_O \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \\ \vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Schimbând punctul de reducere în  $O'$ , torsorul își modifică numai momentul a cărei variație la schimbarea polului este dată de relația (2.4).

$$\tau_{O'} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \\ \vec{M}_{O'} = \vec{M}_0 - \vec{OO'} \times \vec{F} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

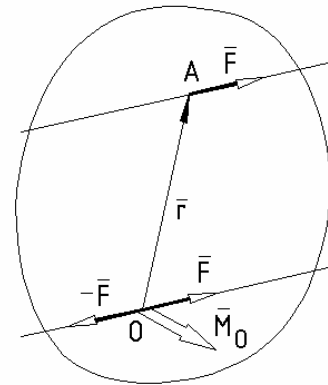


Fig. 2.9

## 2.7. REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE APLICATE RIGIDULUI. TORSORUL DE REDUCERE. VARIAȚIA TORSORULUI CU PUNCTUL DE REDUCERE. INVARIANȚI

Se consideră un rigid acționat în punctele  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , de forțele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , (fig.2.10.a). Un punct oarecare  $A_i$ , raportat la polul  $O$  este definit de vectorul de poziție  $\vec{r}_i$ . A calcula efectul mecanic produs în  $O$  de acțiunea simultană a forțelor din sistemul dat înseamnă a reduce pe rând toate forțele sistemului, obținând în  $O$ , două sisteme de vectori concurenți:

-sistemul de forțe  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , a cărui rezultantă este:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.19)$$

-sistemul de cupluri  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ , al cărui moment rezultat este:

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_i \bar{M}_i = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i \quad (2.20)$$

Forța rezultantă  $\bar{R}$  și momentul rezultat  $\bar{M}_0$  formează un sistem echivalent cu sistemul de forțe dat, numit *torsorul de reducere în punctul O*.

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \sum_i \bar{F}_i \\ \bar{M}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i \end{cases} \quad (2.21)$$

Reducând sistemul de forțe într-un alt punct  $O'$ , se obține:

$$\tau_{0'} \begin{cases} \bar{R} = \sum_i \bar{F}_i \\ \bar{M}_{0'} = \sum_i \bar{r}'_i \times \bar{F}_i \end{cases} \quad (2.22)$$

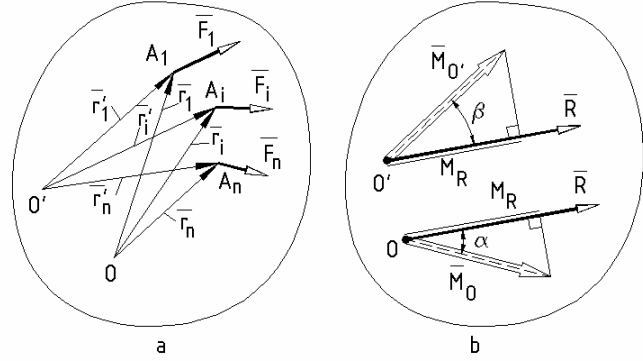


Fig. 2.10

Expresia momentului  $\bar{M}_{0'}$ , ținând seama de relația (2.4), devine:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{0'} &= \sum_i \bar{r}'_i \times \bar{F}_i = \sum_i (\overline{O'O} + \bar{r}_i) \times \bar{F}_i = \sum_i \overline{O'O} \times \bar{F}_i + \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \\ &= \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \overline{O'O} \times \sum_i \bar{F}_i = \bar{M}_0 - \overline{OO'} \times \bar{R} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Torsorul în punctul  $O'$  al sistemului de forțe este:

$$\tau_{0'} \begin{cases} \bar{R} \\ \bar{M}_{0'} = \bar{M}_0 - \overline{OO'} \times \bar{R} \end{cases} \quad (2.24)$$

Comparând relațiile (2.21) și (2.22) se deduce că în raport cu puncte diferite de reducere, rezultanta este aceeași, în timp ce momentul rezultat variază, legea de variație a acestuia fiind dată de relația (2.23).

*Rezultanta  $\bar{R}$  este primul invariant al operației de reducere.*

Efectuând produsul scalar  $\bar{R} \cdot \bar{M}_{0'}$ , numit *trinom invariant* și având în vedere că produsul mixt  $\bar{R} \cdot (\overline{OO'} \times \bar{R}) = 0$ , fiind produs mixt cu vectori coplanari, obținem:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_{0'} = \bar{R} \cdot (\bar{M}_0 - \overline{OO'} \times \bar{R}) = \bar{R} \cdot \bar{M}_0 \quad (2.25)$$

*Trinomul invariant  $\bar{R} \cdot \bar{M}_0$  este al doilea invariant al operației de reducere.*

Forma analitică a trinomului invariant  $\bar{R} \cdot \bar{M}_0$  este:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \quad (2.26)$$

Proiecția momentului rezultat  $\bar{M}_0$  pe direcția rezultantei  $\bar{R}$  este:

$$M_R = \bar{M}_0 \cdot \bar{u}_R = \bar{M}_0 \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \quad (2.27)$$

Vectorul  $\bar{M}_R$ , coliniar cu rezultanta  $\bar{R}$  se va scrie:

$$\bar{M}_R = M_R \cdot \bar{u}_R = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_0}{|\bar{R}|} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} \quad (2.28)$$

Proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei  $M_R$  fiind raportul a două mărimi invariante  $\bar{R} \cdot \bar{M}_0$  și  $|\bar{R}|$  este în consecință, tot o mărime invariantă a operației de reducere (fig.2.10.b). Adică:

$$M_R = |\bar{M}_0| \cos \alpha = |\bar{M}_0| \cos \beta \quad (2.29)$$

Trinomul invariant și proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei nu sunt două mărimi invariante independente. La reducerea într-un punct a unui sistem de forțe există doi invarianți,  $\bar{R}$  și  $\bar{R} \cdot \bar{M}_0$ .

## 2.8. TORSORUL MINIM ȘI AXA CENTRALĂ

Făcând reducerea sistemului de forțe, în diferite puncte ale rigidului, tursorul de reducere este diferit datorită modificării momentului rezultat.

Se descompune momentul rezultat  $\bar{M}_0$ , în două componente:  $\bar{M}_R$ , după direcția rezultantei  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_N$ , după o direcție situată într-un plan normal la direcția rezultantei (intersecția dintre planul normal la rezultanta  $\bar{R}$  și planul definit de vectorii  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_0$ ).

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_R + \bar{M}_N \quad (2.30)$$

Cum componenta  $\bar{M}_R$  este invariantă, modificările momentului  $\bar{M}_0$  se datoresc componentei  $\bar{M}_N$ , care în funcție de punctul de reducere poate lua orice valoare și orice poziție în planul normal pe rezultanta  $\bar{R}$ . Rezultă că proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei este valoarea minimă pe care o poate lua momentul când se face reducerea sistemului de forțe.

$$\bar{M}_R = \bar{M}_{min} \quad (2.31)$$

Rezultanta și momentul minim definesc *tursorul minim*.

$$\tau_{min} \begin{cases} \bar{R} = \sum_i \bar{F}_i \\ \bar{M}_{min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_0}{|\bar{R}|} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} \end{cases} \quad (2.32)$$

*Locul geometric al punctelor în care tursorul are valoare minimă, adică momentul este minim se numește axă centrală.*

## 2.9. CAZURILE DE REDUCERE ALE UNUI SISTEM DE FORȚE.

În baza proprietăților de reducere ale unui sistem de forțe, aplicat unui rigid se pot stabili patru cazuri posibile de reducere a sistemului, la cel mai simplu sistem echivalent

- Cazul 1:  $\bar{R} = 0$ ;  $\bar{M}_O = 0$ . Torsorul sistemului de forțe este nul. Sistemul dat este echivalent cu un sistem de forțe în echilibru și în consecință un rigid acționat de un astfel de sistem de forțe este în echilibru.
- Cazul 2:  $\bar{R} = 0$ ;  $\bar{M}_O \neq 0$ . Torsorul sistemului de forțe este alcătuit din momentul resultant  $\bar{M}_O$ . Sistemul de forțe dat este echivalent cu un cuplu de forțe care acționează într-un plan perpendicular pe  $\bar{M}_O$ .
- Cazul 3:  $\bar{R} \neq 0$ ;  $\bar{M}_O = 0$ . Torsorul sistemului de forțe este constituit din forța resultantă  $\bar{R}$ . Sistemul de forțe este echivalent cu o forță  $\bar{R}$ , aplicată în  $O$ .
- Cazul 4:  $\bar{R} \neq 0$ ;  $\bar{M}_O \neq 0$ . Elementele torsorului sunt diferite de zero.
  - Subcazul 4a:  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ . Cei doi vectori sunt ortogonali. Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică  $\bar{R}$ , suportul acesteia fiind axa centrală și momentul minim  $\bar{M}_{min}$  având valoarea nulă.
  - Subcazul 4b:  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O \neq 0$ . Cei doi vectori formează un unghi  $\alpha \neq \pi/2$ . Sistemul de forțe este echivalent cu un torsor minim pe axa centrală, adică o forță  $\bar{R}$  și un moment minim  $\bar{M}_{min}$ .

**Aplicație.** Asupra unui corp solid acționează sistemul de forțe având ca suporturi, muchiile și diagonalele cubului ca în figura 2.11. Știind că  $|\bar{P}_i| = P$ ; ( $i = 1 \div 6$ ),  $|\bar{P}_j| = \sqrt{2}P$ ; ( $j = 7, 8$ ) și muchia cubului  $a$ , se cere:

1. Să se reducă sistemul de forțe în punctul  $O$
2. Să se determine sistemul echivalent, constituit din forțele:
  - a.  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ ;
  - b.  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_5, \bar{P}_6$ ;
  - c.  $\bar{P}_1, \bar{P}_3, \bar{P}_7, \bar{P}_8$ ;
  - d.  $\bar{P}_2, \bar{P}_5, \bar{P}_6$ ;
  - e.  $\bar{P}_5, \bar{P}_7, \bar{P}_8$ .

**Rezolvare.** 1. Sistemul de forțe redus în punctul  $O$  este definit de torsorul sistemului de forțe, calculat în acest punct.

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^8 \bar{P}_i \\ \bar{M}_O = \sum_{i=1}^8 \bar{M}_O(\bar{P}_i) \end{cases}$$

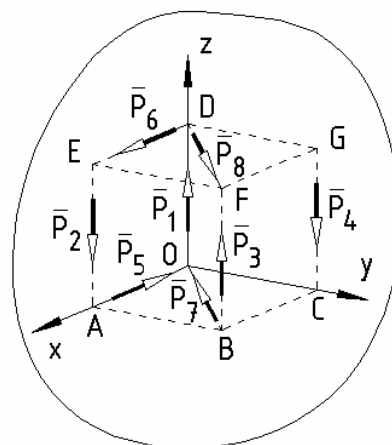


Fig.2.11



Exprimând sub formă analitică, forțele, cât și momentele acestora în raport cu polul  $O$ , obținem:

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 &= P\bar{k}; \quad \bar{P}_2 = -P\bar{k}; \quad \bar{P}_3 = P\bar{k}; \quad \bar{P}_4 = -P\bar{k}; \quad \bar{P}_5 = -P\bar{i}; \quad \bar{P}_6 = P\bar{i}; \\ \bar{P}_7 &= \sqrt{2}P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) = -P\bar{i} - P\bar{j}; \quad \bar{P}_8 = \sqrt{2}P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) = P\bar{i} + P\bar{j} \\ \bar{M}_0(\bar{P}_1) &= 0; \quad \bar{M}_0(\bar{P}_2) = \overline{OA} \times \bar{P}_2 = a\bar{i} \times (-P)\bar{k} = aP\bar{j}; \\ \bar{M}_0(\bar{P}_3) &= \overline{OB} \times \bar{P}_3 = (a\bar{i} + a\bar{j}) \times P\bar{k} = aP\bar{i} - aP\bar{j}; \quad \bar{M}_0(\bar{P}_4) = \overline{OC} \times \bar{P}_4 = a\bar{j} \times (-P)\bar{k} = -aP\bar{i}; \\ \bar{M}_0(\bar{P}_5) &= 0; \quad \bar{M}_0(\bar{P}_6) = \overline{OD} \times \bar{P}_6 = a\bar{k} \times P\bar{i} = aP\bar{j}; \quad \bar{M}_0(\bar{P}_7) = 0; \\ \bar{M}_0(\bar{P}_8) &= \overline{OD} \times \bar{P}_8 = a\bar{k} \times (P\bar{i} + P\bar{j}) = -aP\bar{i} + aP\bar{j}.\end{aligned}$$

Prin însumarea celor două categorii de vectori obținem:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4 + \bar{P}_5 + \bar{P}_6 + \bar{P}_7 + \bar{P}_8 = \\ &= P\bar{k} - P\bar{k} + P\bar{k} - P\bar{k} - P\bar{i} + P\bar{i} - (P\bar{i} + P\bar{j}) + (P\bar{i} + P\bar{j}) = 0 \\ \bar{M}_0 &= \bar{M}_0(\bar{P}_1) + \bar{M}_0(\bar{P}_2) + \bar{M}_0(\bar{P}_3) + \bar{M}_0(\bar{P}_4) + \bar{M}_0(\bar{P}_5) + \bar{M}_0(\bar{P}_6) + \bar{M}_0(\bar{P}_7) + \bar{M}_0(\bar{P}_8) = \\ &= 0 + aP\bar{j} + (aP\bar{i} - aP\bar{j}) - aP\bar{i} + 0 + aP\bar{j} + 0 + (-aP\bar{i} + aP\bar{j}) = -aP\bar{i} + 2aP\bar{j}\end{aligned}$$

Torsorul sistemului de forțe în punctul  $O$  este:

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_0 = -aP\bar{i} + 2aP\bar{j} \end{cases}$$

**2.** Pentru determinarea sistemului echivalent se calculează torsorul în punctul  $O$  al sistemului de forțe dat și în funcție de valorile celor două elemente ale acestuia poate fi definit acest sistem.

2.a. Torsorul în punctul  $O$ , al sistemului de forțe  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$  este:

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4 = P\bar{k} - P\bar{k} + P\bar{k} - P\bar{k} = 0 \\ \bar{M}_0 = \bar{M}_0(\bar{P}_1) + \bar{M}_0(\bar{P}_2) + \bar{M}_0(\bar{P}_3) + \bar{M}_0(\bar{P}_4) = 0 + aP\bar{j} + (aP\bar{i} - aP\bar{j}) - aP\bar{i} = 0 \end{cases}$$

Sistemul dat este echivalent cu un sistem de forțe în echilibru

2.b. Torsorul în punctul  $O$  al sistemului de forțe  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_5, \bar{P}_6$  este:

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_5 + \bar{P}_6 = P\bar{k} - P\bar{k} - P\bar{i} + P\bar{i} = 0 \\ \bar{M}_0 = \bar{M}_0(\bar{P}_1) + \bar{M}_0(\bar{P}_2) + \bar{M}_0(\bar{P}_5) + \bar{M}_0(\bar{P}_6) = 0 + aP\bar{j} + 0 + aP\bar{j} = 2aP\bar{j} \neq 0 \end{cases}$$

Sistemul dat este echivalent cu un cuplu de forțe, al cărui moment este  $\bar{M}_0 = 2aP\bar{j}$ . Acest cuplu este creat de forțele  $\bar{P}_1$  și  $\bar{P}_2$  situate pe muchiile paralele  $OD$  și  $EA$ , respectiv  $\bar{P}_5$  și  $\bar{P}_6$ , situate pe muchiile paralele  $AO$  și  $DE$ .

2.c. Torsorul în punctul  $O$  al sistemului de forțe  $\bar{P}_1, \bar{P}_3, \bar{P}_7, \bar{P}_8$  este:

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_3 + \bar{P}_7 + \bar{P}_8 = P\bar{k} + P\bar{k} - (P\bar{i} + P\bar{j}) + (P\bar{i} + P\bar{j}) = 2P\bar{k} \neq 0 \\ \bar{M}_0 = \bar{M}_0(\bar{P}_1) + \bar{M}_0(\bar{P}_3) + \bar{M}_0(\bar{P}_7) + \bar{M}_0(\bar{P}_8) = 0 + (aP\bar{i} - aP\bar{j}) + 0 + (-aP\bar{i} + aP\bar{j}) = 0 \end{cases}$$

Sistemul dat este echivalent cu o forță unică  $\bar{R} = 2P\bar{k}$ , aplicată în  $O$ .

2.d. Torsorul în punctul  $O$  al sistemului de forțe  $\bar{P}_2, \bar{P}_5, \bar{P}_6$  este:

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \bar{P}_2 + \bar{P}_5 + \bar{P}_6 = -P\bar{k} - P\bar{i} + P\bar{i} = -P\bar{k} \neq 0 \\ \bar{M}_0 = \bar{M}_0(\bar{P}_2) + \bar{M}_0(\bar{P}_5) + \bar{M}_0(\bar{P}_6) = aP\bar{j} + 0 + aP\bar{j} = 2aP\bar{j} \neq 0 \end{cases}$$

Trinomul invariant devine:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = -P\bar{k} \cdot 2aP\bar{j} = 0$$

Sistemul de forțe dat este schivalent cu o forță unică  $\bar{R} = -P\bar{k}$ , pe axa centrală  $\Delta$ .

2.e. Torsorul în punctul  $O$  al sistemului de forțe  $\bar{P}_5, \bar{P}_7, \bar{P}_8$  este:

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \bar{P}_5 + \bar{P}_7 + \bar{P}_8 = -P\bar{i} - (P\bar{i} + P\bar{j}) + \\ \quad + (P\bar{i} + P\bar{j}) = -P\bar{i} \neq 0 \\ \bar{M}_0 = \bar{M}_0(\bar{P}_5) + \bar{M}_0(\bar{P}_7) + \bar{M}_0(\bar{P}_8) = \\ \quad = 0 + 0 + (-aP\bar{i} + aP\bar{j}) = -aP\bar{i} + aP\bar{j} \neq 0 \end{cases}$$

Trinomul invariant este:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = -P\bar{i} \cdot (-aP\bar{i} + aP\bar{j}) = aP^2 \neq 0$$

Sistemul de forțe dat este echivalent cu un torsor minim pe axa centrală  $\Delta$ .

Torsorul minim are expresia:

$$\tau_{min} \begin{cases} \bar{R} = -P\bar{i} \\ \bar{M}_{min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_0}{|\bar{R}|} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{aP^2}{P} \frac{-P\bar{i}}{P} = -aP\bar{i} \end{cases}$$

## 2.10. REDUCEREA SISTEMELOR PARTICULARE DE FORȚE

### 2.10.1. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE CONCURENTE

Un sistem de forțe care acționează asupra unui rigid constituie un sistem de forțe concurente, dacă suporturile lor sunt concurente într-un punct.

Fie un sistem de forțe  $\bar{F}_i$ , aplicate unui rigid în punctele  $A_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), având suporturile concurente în punctul  $O$  (fig.2.12). Forțele  $\bar{F}_i$  fiind vectori alunecători se pot deplasa pe propriile suporturi, astfel ca punctele  $A_i$  să coincidă cu punctul  $O$ .

Torsorul în punctul  $O$  al acestui sistem de forțe este:

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \sum_i \bar{F}_i \\ \bar{M}_0 = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Torsorul minim este constituit din rezultantă iar axa centrală, suportul rezultantei.

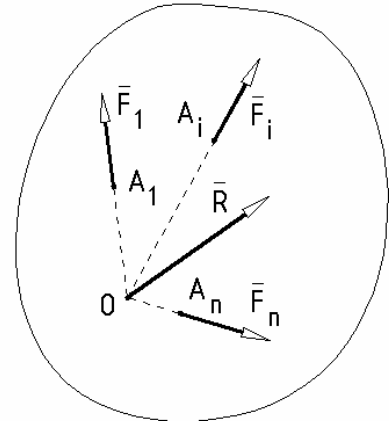


Fig. 2.12

Sunt posibile două cazuri de reducere:

- Cazul 1:  $\bar{R} = 0$ ;  $\bar{M}_0 = 0$ . Sistemul de forțe este echivalent cu un sistem de forțe în echilibru.
- Cazul 2:  $\bar{R} \neq 0$ ;  $\bar{M}_0 = 0$ . Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică  $\bar{R}$ , aplicată în  $O$ .

### 2.10.2. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE COPLANARE

Se numesc forțe coplanare, forțele ale căror suporturi sunt situate în același plan  $[P]$ . Reducând sistemul de forțe într-un punct  $O$ , situat în planul  $[P]$  se obține tursorul sistemului în acest punct, compus din forța rezultantă  $\bar{R}$  și momentul rezultat  $\bar{M}_0$ , perpendicular pe planul forțelor (momentul rezultat reprezintă suma vectorială a momentelor forțelor din sistem, calculate în raport cu punctul  $O$  și care sunt prin definiție, perpendiculare pe planul forțelor).

Trinomul invariant este  $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$ .

Pentru sistemele de forțe coplanare există următoarele cazuri de reducere:

- Cazul 1:  $\bar{R} = 0$ ;  $\bar{M}_0 = 0$ . Sistemul de forțe este echivalent cu un sistem de forțe în echilibru.
- Cazul 2:  $\bar{R} = 0$ ;  $\bar{M}_0 \neq 0$ . Sistemul de forțe dat este echivalent cu un cuplu de forțe de moment  $\bar{M}_0$  perpendicular pe planul forțelor.
- Cazul 3:  $\bar{R} \neq 0$ ;  $\bar{M}_0 = 0$ . Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică  $\bar{R}$ , aplicată pe axa centrală care trece prin  $O$ .
- Cazul 4:  $\bar{R} \neq 0$ ;  $\bar{M}_0 \neq 0$ ;  $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$ . Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică  $\bar{R}$ , aplicată pe axa centrală.

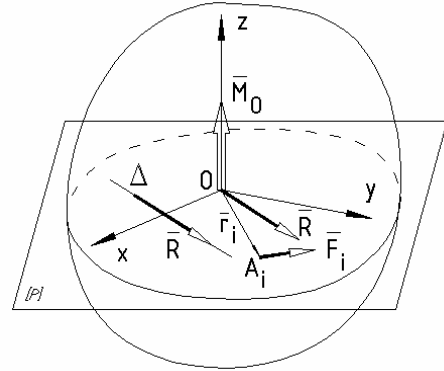


Fig. 2.13

Pentru studiul analitic al sistemului de forțe coplanar (fig.2.13) se consideră ca plan al forțelor, planul  $Oxy$  de ecuație  $z = 0$ . Forțele  $\bar{F}_i$  și vectorii de poziție  $\bar{r}_i$  ai punctelor de aplicație  $A_i$  ale forțelor au expresiile:

$$\bar{F}_i = F_{ix}\bar{i} + F_{iy}\bar{j}; \quad \bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} \quad (2.34)$$

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \sum_i F_{ix}\bar{i} + \sum_i F_{iy}\bar{j} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} \\ \bar{M}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_i \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & 0 \\ F_{ix} & F_{iy} & 0 \end{vmatrix} = \sum_i (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})\bar{k} = M_z\bar{k} = M_0\bar{k} \end{cases} \quad (2.35)$$

### 2.10.3. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE PARALELE

Sistemul de forțe  $\vec{F}_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ale căror suporturi sunt paralele cu o direcție comună, de versor  $\vec{u}$ , formează un sistem de forțe paralele (fig.2.14).

O forță  $\vec{F}_i$  din sistem poate fi scrisă în funcție de versorul  $\vec{u}$ , astfel:

$$\vec{F}_i = F_i \vec{u} \quad (2.36)$$

unde  $F_i$  este o mărime algebrică, pozitivă sau negativă, după cum forța este orientată în același sens sau în sens contrar, versorului  $\vec{u}$ .

Rezultanta sistemului este:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i F_i \vec{u} = \left( \sum_i F_i \right) \vec{u} \quad (2.37)$$

Scalarul rezultantei este egal cu suma algebrică a scalarilor forțelor.

Momentul rezultant în punctul  $O$  este:

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (F_i \vec{u}) = \left( \sum_i F_i \vec{r}_i \right) \times \vec{u} \quad (2.38)$$

Trinomul invariant este nul

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = \left[ \left( \sum_i F_i \right) \vec{u} \right] \cdot \left[ \left( \sum_i F_i \vec{r}_i \right) \times \vec{u} \right] = 0 \quad (2.39)$$

datorită coliniarității a doi termeni din produsul mixt.

Cazurile de reducere ale unui sistem de forțe paralele sunt:

- Cazul 1:  $\vec{R} = 0$ ;  $\vec{M}_0 = 0$ . Sistemul de forțe este echivalent cu un sistem de forțe în echilibru.
- Cazul 2:  $\vec{R} = 0$ ;  $\vec{M}_0 \neq 0$ . Sistemul dat este echivalent cu un cuplu de forțe de moment  $\vec{M}_0$  perpendicular pe direcția forțelor.
- Cazul 3:  $\vec{R} \neq 0$ ;  $\vec{M}_0 = 0$ . Sistemul de forțe este echivalent cu o forță  $\vec{R}$ , aplicată în  $O$ .
- Cazul 4:  $\vec{R} \neq 0$ ;  $\vec{M}_0 \neq 0$ ;  $\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = 0$ . Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică  $\vec{R}$ , aplicată pe axa centrală.

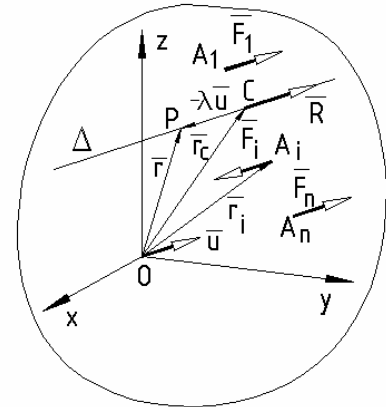


Fig. 2.14

*Axa centrală. Centrul forțelor paralele.*

Axa centrală reprezintă locul geometric al punctelor unde momentul este nul, întrucât  $\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = 0$ . Pentru determinarea axei centrale se utilizează relația (2.4) care exprimă momentul într-un punct curent  $P$ , situat pe această axă și unde  $\vec{OP} = \vec{r}$  este vectorul de poziție al punctului  $P$ .

$$\vec{M}_P = \vec{M}_0 - \vec{OP} \times \vec{R} = 0 \quad (2.40)$$

Înlocuind pe  $\vec{R}$  și  $\vec{M}_0$  cu expresiile date de (2.37) și (2.38), obținem:

$$(\sum_i F_i \bar{r}_i) \times \bar{u} - \bar{r} \times (\sum_i F_i) \bar{u} = 0 \quad (2.41)$$

sau schimbând poziția factorului scalar în al doilea produs vectorial rezultă:

$$\begin{aligned} (\sum_i F_i \bar{r}_i) \times \bar{u} - (\sum_i F_i) \bar{r} \times \bar{u} &= 0 \\ (\sum_i F_i \bar{r}_i - \sum_i F_i \bar{r}) \times \bar{u} &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Produsul vectorial fiind nul, cei doi vectori sunt coliniari.

$$\sum_i F_i \bar{r}_i - \sum_i F_i \bar{r} = \lambda' \bar{u} \quad (2.43)$$

Vectorul de poziție al punctului curent  $P$ , de pe axa centrală este:

$$\bar{r} = \frac{\sum_i F_i \bar{r}_i}{\sum_i F_i} - \frac{\lambda'}{\sum_i F_i} \bar{u} \quad (2.44)$$

notând cu  $\frac{\lambda'}{\sum_i F_i} = \lambda$ , rezultă:

$$\bar{r} = \frac{\sum_i F_i \bar{r}_i}{\sum_i F_i} - \lambda \bar{u} \quad (2.45)$$

Relația (2.45) reprezintă ecuația vectorială a axei centrale (fig.2.14) care este o dreaptă paralelă cu direcția comună a sistemului de forțe, dată de versorul  $\bar{u}$  și care trece printr-un punct fix  $C$ , numit *centrul forțelor paralele*.

Vectorul de poziție al centrului forțelor paralele  $C$  este:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_i F_i \bar{r}_i}{\sum_i F_i} \quad (2.46)$$

Coordonatele centrului forțelor paralele  $C$  sunt:

$$x_C = \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_i F_i y_i}{\sum_i F_i}; \quad z_C = \frac{\sum_i F_i z_i}{\sum_i F_i} \quad (2.47)$$

*Proprietățile centrului forțelor paralele.*

1. Dacă toate forțele sunt rotite în același sens, cu același unghi, axa centrală se va roti în același sens și cu același unghi, trecând în permanență prin punctul  $C$ , întrucât vectorul  $\bar{r}_C$  nu depinde de versorul direcției comune.
2. Centrul forțelor paralele nu depinde de sistemul de referință, fiind o caracteristică intrinsecă a sistemului de forțe.

Considerând noua origine a sistemului,  $O'$  și  $\overline{O'O} = \bar{r}_0$ , vectorii de poziție ai punctelor de aplicație ale forțelor în raport cu noua origine pot fi scriși sub forma:  $\bar{r}_i' = \bar{r}_0 + \bar{r}_i$ . Vectorul de poziție al centrului forțelor paralele raportat la noul sistem va fi:

$$\bar{r}_C' = \frac{\sum_i F_i \bar{r}_i'}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i F_i (\bar{r}_0 + \bar{r}_i)}{\sum_i F_i} = \frac{\bar{r}_0 \sum_i F_i}{\sum_i F_i} + \frac{\sum_i F_i \bar{r}_i}{\sum_i F_i} = \bar{r}_0 + \bar{r}_C$$

vectorul de poziție al centrului forțelor paralele s-a modificat la fel ca pentru oricare punct  $A_i$ , deci poziția centrului  $C$  față de punctele  $A_i$  nu s-a schimbat.

3. Vectorii forță sunt *vectori legați*, caz în care centrul forțelor paralele are o existență intrinsecă, poziția acestuia fiind funcție de poziția punctelor de aplicație și scalarii forțelor. Dacă forțele sunt considerate *vectori alunecători*, punctul  $C$  nu mai are semnificație.

### 2.10.3.1. REDUCEREA FORȚELOR PARALELE, DISTRIBUITE

Forțele paralele, perpendiculare pe segmentul de dreaptă  $AB$ , situat pe axa  $Ax$ , de lungime  $l$  sunt distribuite după o lege de variație,  $p = p(x)$  (fig.2.15). Se urmărește determinarea rezultantei,  $R$  și poziția centrului forțelor paralele,  $x_C$ .

Notăm prin  $p(x)$ , forța pe unitatea de lungime la distanța  $x$ , de capătul  $A$ , măsurată în  $N/m$ . Mărimea rezultantei  $R$  se obține prin integrarea pe lungimea  $l$ , a forței elementare,  $dR$ , creată de forța distribuită  $p(x)$  considerată constantă pe elementul infinitezimal  $dx$ .

$$R = \int_{AB} dR = \int_0^l p(x) dx \quad (2.48)$$

Poziția centrului forțelor paralele distribuite  $C$  este definită de abscisa  $x_C$ :

$$x_C = \frac{\int_{AB} x dR}{\int_{AB} dR} = \frac{\int_0^l p(x) x dx}{\int_0^l p(x) dx} \quad (2.49)$$

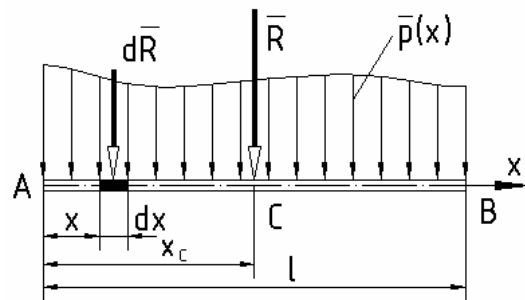


Fig. 2.15

Mărimea rezultantei  $R$  este aria câmpului de distribuție a forței iar suportul acesteia trece prin centrul de greutate  $C$  al suprafeței.

- a. *Forță distribuită uniform.* Forța se distribuie constant pe lungimea barei (fig.2.16), legea de variație fiind:

$$p(x) = p = ct. \quad (2.50)$$

$$R = \int_0^l p dx = px \Big|_0^l = pl \quad (2.51)$$

$$x_C = \frac{\int_0^l p x dx}{\int_0^l p dx} = \frac{\frac{x^2}{2} \Big|_0^l}{x \Big|_0^l} = \frac{l}{2} \quad (2.52)$$

O sarcină distribuită uniform este echivalentă cu o sarcină concentrată  $R = pl$ , aplicată la mijlocul porțiunii încărcate,  $x_C = l/2$ .

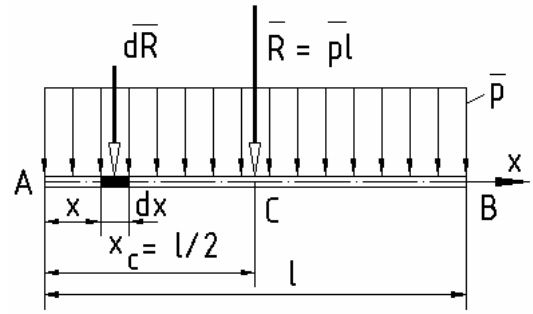


Fig. 2.16

b. *Forță distribuită triunghiulară.* Valoarea maximă a forței distribuite este  $p$  (fig.2.17) iar legea de variație pe lungimea barei, dată de funcția:

$$p(x) = p \frac{x}{l} \quad (2.53)$$

$$R = \int_0^l p \frac{x}{l} dx = \frac{px^2}{2l} \Big|_0^l = \frac{pl}{2} \quad (2.54)$$

$$x_C = \frac{\int_0^l p \frac{x}{l} x dx}{\int_0^l p \frac{x}{l} dx} = \frac{\frac{x^3}{3} \Big|_0^l}{\frac{x^2}{2} \Big|_0^l} = \frac{2l}{3} \quad (2.55)$$

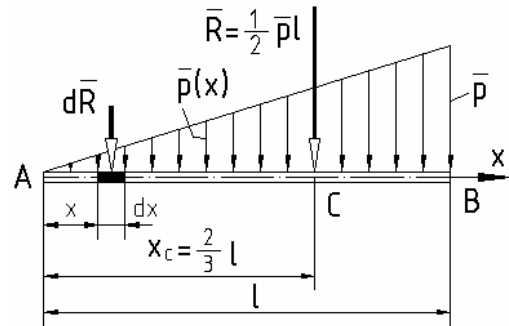


Fig. 2.17

O sarcină distribuită triunghiular este echivalentă cu o forță de mărime  $R = pl/2$ , aplicată la distanța  $x_C = 2l/3$ , de capătul  $A$ .

c. *Forță distribuită parabolică.* Valoarea maximă a forței distribuite este  $p$  (fig.2.18) iar legea de variație pe lungimea barei, dată de funcția:

$$p(x) = p \frac{x^2}{l^2} \quad (2.56)$$

$$R = \int_0^l p \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{px^3}{3l^2} \Big|_0^l = \frac{pl}{3} \quad (2.57)$$

$$x_C = \frac{\int_0^l p \frac{x^2}{l^2} x dx}{\int_0^l p \frac{x^2}{l^2} dx} = \frac{\frac{x^4}{4} \Big|_0^l}{\frac{x^3}{3} \Big|_0^l} = \frac{3l}{4} \quad (2.58)$$

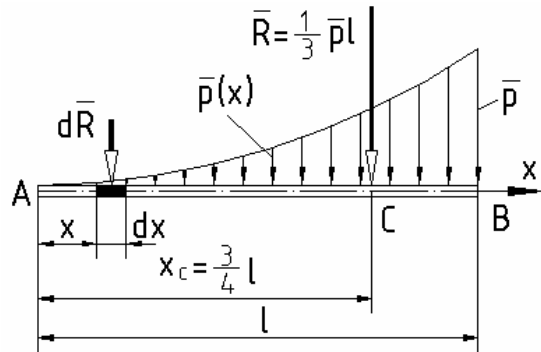


Fig. 2.18

O sarcină distribuită parabolică este echivalentă cu o forță de mărime  $R = pl/3$ , aplicată la distanța  $x_C = 3l/4$ , de capătul  $A$ .

**Aplicații. 1.** O forță distribuită uniform acționează pe semicercul de rază  $r$ . Intensitatea forței pe unitatea de lungime este  $p$ . Să se reducă sistemul de forțe în punctul  $O$ .

*Rezolvare.* Forța distribuită pe semicerc constituie un sistem de forțe concurente. Torsorul în centrul semicercului  $O$  este constituit numai din forța rezultantă.

Datorită simetriei, suportul rezultantei este dat de axa de simetrie  $Ox$  a semicercului, componenta pe direcția axei  $Oy$  fiind nulă.

Pentru o poziție curentă a arcului elementar  $dl$ , definită de unghiul la centru  $\theta$ , forța elementară care acționează pe acesta este:

$$d\vec{R} = \bar{p} \cdot dl = \bar{p} r d\theta$$

Cum:

$$\bar{p} = p_x \bar{i} + p_y \bar{j} = -p \cos \theta \cdot \bar{i} - p \sin \theta \cdot \bar{j}$$

și

$$d\vec{R} = dR_x \bar{i} + dR_y \bar{j} = -pr d\theta \cos \theta \cdot \bar{i} - pr d\theta \sin \theta \cdot \bar{j}$$

rezultanta care se obține prin integrare:

$$\vec{R} = \int_{(D)} d\vec{R} = \int_{(D)} \bar{p} r d\theta$$

poate fi scrisă prin componentele pe cele două axe

$$\vec{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j}$$

și ale căror valori sunt:

$$R_x = \int_{(D)} dR_x = -pr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot d\theta = -pr \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2pr$$

$$R_y = \int_{(D)} dR_y = -pr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot d\theta = pr \cos \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Rezultanta este un vector de mărime  $|\vec{R}| = 2pr$  situat pe axa  $Ox$  și care acționează în sens contrar acesteia.

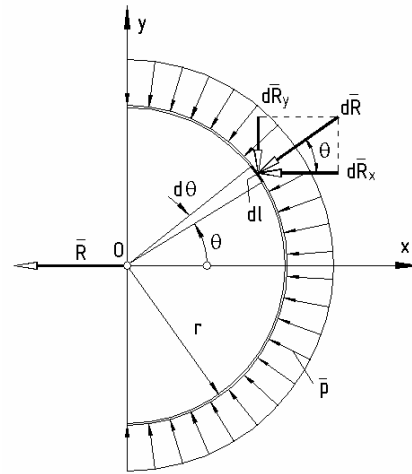


Fig.2.19

**2.** Asupra unei plăci (fig.2.20) acționează sistemul de forțe coplanar, de mărimi,  $F_1 = F_2 = P$ ,  $F_3 = \sqrt{2}P$  și un cuplu de moment  $M = 2aP$ , ale cărui forțe sunt situate în planul celorlalte. Dacă suportul forței  $\vec{F}_3$  trece prin punctul  $A(a, 0)$  și formează cu axa  $Ox$ , unghiul  $\alpha = \pi/4$ , să se determine sistemul echivalent.

*Rezolvare.* Reducând sistemul în originea  $O$ , elementele torsorului în acest punct sunt:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 =$$

$$= P\bar{i} + P\bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) =$$

$$= 2P\bar{j} \neq 0$$

$$\vec{M}_O = \vec{M} + \vec{OA} \times \vec{F}_3 = 2aP\bar{k} +$$

$$+ a\bar{i} \times \sqrt{2}P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) = aP\bar{k} \neq 0$$

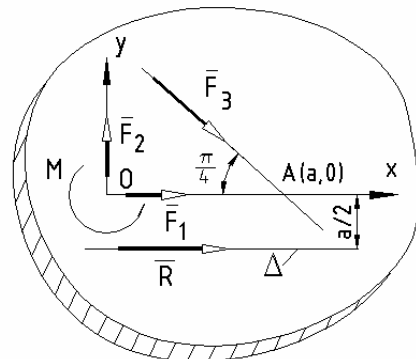


Fig.2.20



Cum  $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$ , sistemul este echivalent cu o forță unică pe axa centrală, a cărei ecuație este:

$$M_0 = xR_y - yR_x$$

$$aP = -2Py \Rightarrow y = -\frac{a}{2}$$

adică o dreaptă paralelă cu axa Ox la distanța  $a/2$  sub aceasta.

**3.** Asupra unui corp acționează sistemul de forțe paralele din figura 2.21. Dacă  $F_1 = F_2 = F_3 = P$ , să se reducă sistemul de forțe în  $O$  și să se determine coordonatele centrului forțelor paralele.

*Rezolvare.* Torsorul în punctul  $O$  al sistemului de forțe este:

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i = \left( \sum_{i=1}^3 F_i \right) \bar{k} \\ \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^3 \overline{OA_i} \times \bar{F}_i = \left( \sum_{i=1}^3 F_i \overline{OA_i} \right) \times \bar{k} \end{cases}$$

Rezultanta are direcția axei  $Oz$ .

$$\bar{R} = (-F_1 - F_2 + F_3) \bar{k} = -P \bar{k}$$

Momentul rezultat este:

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 &= (F_1 \overline{OA_1} + F_2 \overline{OA_2} + F_3 \overline{OA_3}) \times \bar{k} = \\ &= (-Pa\bar{i} - Pa\bar{j} + Pa\bar{k}) \times \bar{k} = -aP\bar{i} + aP\bar{j} \end{aligned}$$

Torsorul în punctul  $O$  are expresia:

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = -P \bar{k} \neq 0 \\ \bar{M}_0 = -aP \bar{i} + aP \bar{j} \neq 0 \end{cases}$$

Sistemul de forțe este echivalent cu o rezultantă  $\bar{R}$ , al cărei suport este axa centrală, o dreaptă paralelă cu axa  $Oz$  care trece prin  $C$ , centrul forțelor paralele de coordonate:

$$x_C = \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i} = \frac{-Pa}{-P} = a; \quad y_C = \frac{\sum_i F_i y_i}{\sum_i F_i} = \frac{-Pa}{-P} = a; \quad z_C = \frac{\sum_i F_i z_i}{\sum_i F_i} = \frac{Pa}{-P} = -a$$

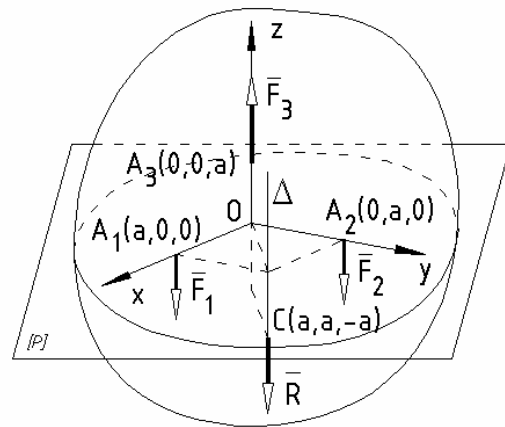


Fig. 2.21

## TEST DE EVALUARE

- Momentul forței în raport cu un punct reprezintă:
  - capacitatea forței de a roti corpul în jurul unei axe care trece prin acel punct
  - capacitatea forței de a roti corpul în jurul punctului respectiv
  - capacitatea forței de a roti corpul în jurul unei axe care trece prin acel punct, perpendiculară pe planul definit de forță și punct
- Expresia momentului forței în raport cu un punct este:
  - $\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$

- b.  $\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{F} \times \overline{r}$
- c.  $M_O(\overline{F}) = \overline{r} \cdot \overline{F}$
3. Brațul forței reprezintă:
- lungimea (modulul) vectorului de poziție al punctului de aplicație al forței
  - lungimea perpendicularei dusă din punctul față de care se calculează momentul, pe suportul forței
  - nici una din variantele *a* și *b*
4. Legea de variație a momentului la schimbarea polului este dată de relația:
- $\overline{M}_{O'} = \overline{M}_O - \overline{OO'} \times \overline{R}$
  - $\overline{M}_{O'} = \overline{M}_O + \overline{R} \times \overline{OO'}$
  - $\overline{M}_{O'} = \overline{M}_O + \overline{O'O} \times \overline{R}$
5. Cuplul de forțe este caracterizat de:
- rezultanta cuplului de forțe
  - momentul cuplului de forțe
  - brațul cuplului de forțe
6. Rezultatul operației de reducere al unui sistem de forțe care acționează asupra rigidului este:
- determinarea unui sistem de forțe echivalent în punctul respectiv
  - determinarea tursorului sistemului de forțe în acel punct
  - determinarea rezultantei sistemului de forțe în acel punct
7. Invarianții operației de reducere într-un punct al unui sistem de forțe sunt:
- rezultanta sistemului de forțe
  - trinomial invariant al sistemului de forțe
  - variantele *a* și *b* împreună
8. Torsorul minim al unui sistem de forțe care acționează asupra rigidului reprezintă:
- torsorul sistemului de forțe, calculat într-un punct situat pe axa centrală
  - rezultanta  $\overline{R}$  și momentul minim  $\overline{M}_{min}$
  - proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei
9. Poziția centrului forțelor paralele este definită de:
- vectorul de poziție al centrului forțelor paralele  $\overline{r}_C$
  - coordonatele centrului forțelor paralele:  $x_C = \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i}$ ;  $y_C = \frac{\sum_i F_i y_i}{\sum_i F_i}$ ;  $z_C = \frac{\sum_i F_i z_i}{\sum_i F_i}$
  - depinde de sistemul de referință ales
10. Mărimile care caracterizează forțele distribuite sunt:
- rezultanta forțelor distribuite
  - poziția rezultantei forțelor distribuite pe zona pe care se distribuie
  - variantele *a* și *b* împreună

### 3. CENTRE DE GREUTATE (DE MASĂ)

#### 3.1. GREUTATEA CORPURILOR

La suprafața Pământului, corpurile sunt supuse atracției acestuia. Asupra unui corp de masă  $m$  se exercită o forță, proporțională cu masa corpului, numită greutate.

$$\overline{G} = m\overline{g} \quad (3.1)$$

unde  $\overline{g}$ , este *acceleerația terestră* și reprezintă rezultanta dintre *acceleerația gravitațională* (datorită forței de atracție gravitațională) și *acceleerația de transport* (datorită mișcării de rotație a Pământului).

Valoarea accelerației terestre  $\overline{g}$ , variază cu latitudinea și altitudinea, aceste variații fiind relativ mici, în calcule se ia valoarea medie  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

Ținând seama de raportul dintre dimensiunile corpurilor uzuale și ale Pământului se poate considera că greutatea corpurilor sunt forțe îndreptate după verticala locului, deci paralele între ele. Din acest motiv, tratarea problemei greutății sistemelor materiale reprezintă un caz particular al forțelor paralele, putându-se utiliza rezultatele stabilite la acest capitol.

#### 3.2. CENTRUL DE GREUTATE AL UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

Fie un sistem de puncte materiale  $A_i$  de mase  $m_i$  și vectori de poziție  $\overline{r}_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) în raport cu originea  $O$  a sistemului de axe.

Greutatea sistemului este:

$$G = \sum_i G_i = \sum_i m_i g = g \sum_i m_i = Mg \quad (3.2)$$

și este aplicată într-un punct definit ca *centrul de greutate* al sistemului, care este centrul forțelor paralele de greutate  $\overline{G}_i$  (fig.3.1).

Vectorul de poziție al centrului de greutate  $C$ , conform relației (2.43) este:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_i G_i \overline{r}_i}{\sum_i G_i} \quad (3.3)$$

Înlocuind relația (3.2) în (3.3) obținem:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_i G_i \overline{r}}{\sum_i G_i} = \frac{\sum_i m_i g \overline{r}}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \overline{r}}{\sum_i m_i} \quad (3.4)$$

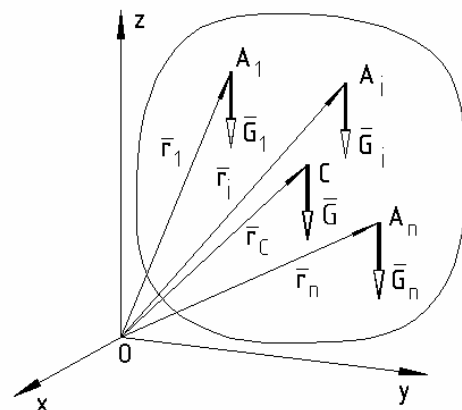


Fig. 3.1

ceea ce demonstrează faptul că centrul de greutate  $C$  este un element geometric, depinzând de modul de distribuție a maselor din punctele  $A_i$ , fapt care justifică denumirea de *centrul de masă*.

Proiecțiile pe axe ale vectorului  $\bar{r}_C$  sunt coordonatele centrului de masă:

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}; \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}; \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \quad (3.5)$$

### 3.3. MOMENTELE STATICE

Momentul static al unui sistem de puncte materiale, în raport cu un plan este suma produselor dintre masele punctelor și distanțele acestora la plan (care pot fi pozitive sau negative, după cum aceste puncte sunt situate de o parte sau de alta a planului respectiv). Relația (3.5) poate fi scrisă și sub forma de mai jos, care constituie și teorema momentelor statice.

$$\sum_i m_i x_i = Mx_C; \quad \sum_i m_i y_i = My_C; \quad \sum_i m_i z_i = Mz_C \quad (3.6)$$

*Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este egal cu produsul dintre masa sistemului și distanța de la centrul maselor la acel plan.*

### 3.4. PROPRIETĂȚILE CENTRULUI DE GREUTATE

1. *Dacă sistemul de puncte materiale are un plan, o axă sau un centru de simetrie, centrul de masă se află în acel plan, pe acea axă sau în acel centru.*

Presupunând că sistemul admite planul  $Oxz$  ca plan de simetrie, oricărui punct  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  de masă  $m_i$  îi corespunde un punct  $P_j(x_i, -y_i, z_i)$  de aceeași masă  $m_i$ . Cum  $\sum_i m_i y_i = 0$ , rezultă  $y_C = 0$ , deci centrul de masă se află în planul  $Oxz$ .

Dacă presupunem că sistemul admite axa  $Oz$ , ca axă de simetrie, atunci unui punct  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  de masă  $m_i$  îi corespunde totdeauna un punct  $P_j(-x_i, -y_i, z_i)$  de aceeași masă  $m_i$ . Cum  $\sum_i m_i x_i = 0$ ;  $\sum_i m_i y_i = 0$ , rezultă  $x_C = 0$ ,  $y_C = 0$ , deci centrul de masă se află pe axa  $Oz$ .

Considerând că sistemul admite originea sistemului de referință  $O$ , ca centru de simetrie, din condițiile de simetrie rezultă că oricărui punct  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  de masă  $m_i$  îi corespunde întotdeauna un punct  $P_j(-x_i, -y_i, -z_i)$  de aceeași masă  $m_i$ . Cum momentele statice,  $\sum_i m_i x_i = 0$ ;  $\sum_i m_i y_i = 0$ ;  $\sum_i m_i z_i = 0$ , rezultă  $x_C = 0$ ,  $y_C = 0$ ,  $z_C = 0$ , deci centrul de masă se află în polul  $O$ .

2 *Dacă un sistem de puncte materiale (S) se compune dintr-un număr de p subsisteme ( $S_1$ ), ( $S_2$ ), ..., ( $S_p$ ), de mase  $M_1, M_2, \dots, M_p$  și vectori de poziție ai*

centrelor de masă  $\bar{r}_{C_1}, \bar{r}_{C_2}, \dots, \bar{r}_{C_p}$ , centrul de masă al sistemului (S) se obține considerând masele sistemelor componente  $M_i$ , concentrate în centrele de masă,  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ).

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_i M_i \bar{r}_{C_i}}{\sum_i M_i} \quad (3.7)$$

Pentru demonstrație se ține seama că, în baza relației (3.4), vectorii de poziție ai centrelor maselor  $\bar{r}_{C_i}$  au expresiile:

$$\bar{r}_{C_1} = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i}; \bar{r}_{C_2} = \frac{\sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_2)} m_i}; \dots \bar{r}_{C_p} = \frac{\sum_{(S_p)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_p)} m_i} \quad (3.8)$$

Întrucât

$$\sum_{(S_1)} m_i = M_1; \sum_{(S_2)} m_i = M_2; \dots \sum_{(S_p)} m_i = M_p \quad (3.9)$$

relațiile (3.8) pot fi scrise astfel:

$$\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i = M_1 \bar{r}_{C_1}; \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i = M_2 \bar{r}_{C_2}; \dots \sum_{(S_p)} m_i \bar{r}_i = M_p \bar{r}_{C_p} \quad (3.10)$$

Vectorul de poziție  $\bar{r}_C$  al centrului maselor sistemului (S) este:

$$\begin{aligned} \bar{r}_C &= \frac{\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S)} m_i} = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i + \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i + \dots + \sum_{(S_p)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i + \sum_{(S_2)} m_i + \dots + \sum_{(S_p)} m_i} = \\ &= \frac{M_1 \bar{r}_{C_1} + M_2 \bar{r}_{C_2} + \dots + M_p \bar{r}_{C_p}}{M_1 + M_2 + \dots + M_p} = \frac{\sum_i M_i \bar{r}_{C_i}}{\sum_i M_i} \end{aligned}$$

3. Dacă un sistem de puncte materiale (S) poate fi considerat ca provenind dintr-un sistem ( $S_1$ ) din care s-a extras un sistem ( $S_2$ ) și dacă se cunosc masele  $M_1, M_2$  și centrele de masă definite de vectorii de poziție  $\bar{r}_{C_1}, \bar{r}_{C_2}$ , atunci centrul de masă al sistemului (S) se poate obține considerând că masele  $M_1$  și  $M_2$  s-ar concentra în centrele de masă  $C_1$  și  $C_2$ .

Vectorul de poziție al centrului de masă C, al sistemului (S) are expresia:

$$\bar{r}_C = \frac{M_1 \bar{r}_{C_1} + (-M_2) \bar{r}_{C_2}}{M_1 + (-M_2)} = \frac{M_1 \bar{r}_{C_1} - M_2 \bar{r}_{C_2}}{M_1 - M_2} \quad (3.11)$$

Referitor la sistemele ( $S_1$ ) și ( $S_2$ ) putem scrie conform (3.9) și (3.10):

$$\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i = M_1 \bar{r}_{C_1}; \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i = M_2 \bar{r}_{C_2}; \sum_{(S_1)} m_i = M_1; \sum_{(S_2)} m_i = M_2$$

Pentru întreg sistemul se obține:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S)} m_i} = \frac{(\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i + \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i) - \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{(\sum_{(S)} m_i + \sum_{(S_2)} m_i) - \sum_{(S_2)} m_i} = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i - \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i - \sum_{(S_2)} m_i} = \frac{M_1 \bar{r}_{C_1} - M_2 \bar{r}_{C_2}}{M_1 - M_2}$$

*Observație.* Proprietățile centrului de masă prezentate pentru sisteme de puncte materiale sunt valabile și în cazul sistemelor de corpuri omogene.

### 3.5. CENTRUL DE GREUTATE AL CORPURILOR OMOGENE

În mecanică, corpul rigid se admite ca fiind un continuu material nedeformabil, adică orice element de volum are masă iar distanțele dintre puncte rămân nemodificate, indiferent de solicitările la care este supus corpul. Pentru a stabili o legătură cu rezultatele obținute în cazul sistemelor de  $n$  puncte materiale se consideră corpul divizat în volume elementare  $\Delta V_i$ , de mase  $\Delta m_i$ .

Vectorul de poziție al centrului de masă este definit, conform relației (3.4) cu condiția discretizării la limită a maselor elementare. Când  $\Delta m_i \rightarrow 0$ , sumele definite de (3.4) devin integrale, definite pe domeniul  $(D)$ , ocupat de corp.

$$\bar{r}_C = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i \Delta m_i \bar{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{\int_{(D)} \bar{r} dm}{\int_{(D)} dm} \quad (3.12)$$

Domeniul  $(D)$  se va nota cu:  $(V)$ , în cazul *blocurilor* - corpuri cu trei dimensiuni,  $(A)$ , în cazul *plăcilor* - corpuri cu două dimensiuni, a treia fiind neglijabilă în raport cu celelalte două și  $(l)$ , în cazul *barelor* - corpuri cu o singură dimensiune, celelalte două fiind neglijabile în raport cu prima.

Corpul omogen este corpul a cărui densitate este aceeași în toate punctele sale. Cum *densitatea* sau *masa specifică* a corpului (blocului) este definită prin raportul dintre masa corespunzătoare și volumul elementar,

$$\rho = \rho_V = \frac{dm}{dV} \quad (3.13)$$

vectorul de poziție al centrului de masă al blocului omogen este:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(D)} \bar{r} dm}{\int_{(D)} dm} = \frac{\int_{(V)} \bar{r} \rho_V dV}{\int_{(V)} \rho_V dV} = \frac{\int_{(V)} \bar{r} dV}{\int_{(V)} dV} \quad (3.14)$$

ale cărui coordonate sunt:

$$x_C = \frac{\int_{(V)} x dV}{\int_{(V)} dV}; \quad y_C = \frac{\int_{(V)} y dV}{\int_{(V)} dV}; \quad z_C = \frac{\int_{(V)} z dV}{\int_{(V)} dV} \quad (3.15)$$

În cazul plăcilor se poate defini, în mod analog, *densitatea superficială* .

$$\rho_A = \frac{dm}{dA} \quad (3.16)$$

Vectorul de poziție al centrului de masă al plăcii omogene este:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(D)} \bar{r} dm}{\int_{(D)} dm} = \frac{\int_{(A)} \bar{r} \rho_A dA}{\int_{(A)} \rho_A dA} = \frac{\int_{(A)} \bar{r} dA}{\int_{(A)} dA} \quad (3.17)$$

ale cărui coordonate sunt:

$$x_C = \frac{\int_{(A)} x dA}{\int_{(A)} dA}; \quad y_C = \frac{\int_{(A)} y dA}{\int_{(A)} dA}; \quad z_C = \frac{\int_{(A)} z dA}{\int_{(A)} dA} \quad (3.18)$$

În cazul barelor se definește *densitatea liniară*:

$$\rho_l = \frac{dm}{dl} \quad (3.19)$$

Vectorul de poziție al centrului de masă al barei omogene are expresia:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(D)} \bar{r} dm}{\int_{(D)} dm} = \frac{\int_{(l)} \bar{r} \rho_l dl}{\int_{(l)} \rho_l dl} = \frac{\int_{(l)} \bar{r} dl}{\int_{(l)} dl} \quad (3.20)$$

ale cărui coordonate sunt:

$$x_C = \frac{\int_{(l)} x dl}{\int_{(l)} dl}; \quad y_C = \frac{\int_{(l)} y dl}{\int_{(l)} dl}; \quad z_C = \frac{\int_{(l)} z dl}{\int_{(l)} dl} \quad (3.21)$$

**Aplicații. 1.** Să se determine centrul de greutate al unei bare omogene (fig.3.2) de forma arcului de cerc cu raza  $R$  și unghiul la centru,  $2\alpha$  (exprimat în *radiani*).

*Rezolvare.* Admițând axa  $Ox$ , axă de simetrie, centrul de greutate al arcului de cerc  $AB$  se află pe această axă, poziția fiind definită de abscisa  $x_C$ .

Elementul de bară,  $MM' = dl = R d\theta$ , are abscisa,  $x = R \cos \theta$ .

$$x_C = \frac{\int_{(l)} x dl}{\int_{(l)} dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \theta \cdot R d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R d\theta} = R \frac{\sin \theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

În cazul particular al barei semicirculare, în care  $\alpha = \pi / 2$ , abscisa centrului de greutate devine:

$$x_C = R \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 2 \frac{R}{\pi}$$

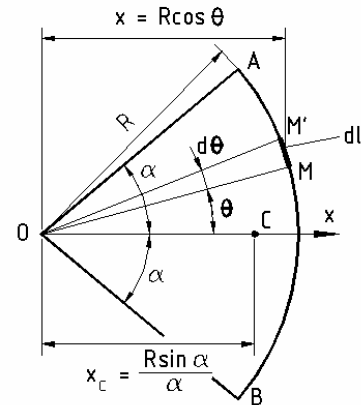


Fig. 3.2

2. Să se determine centrul de greutate al unei plăci omogene (fig.3.3) având forma unui sector circular, de rază  $R$  și unghi la centru,  $2\alpha$  (exprimat în *radiani*).

*Rezolvare.* Se alege axa  $Ox$ , ca bisectoare a unghiului la centru, care este deci și axă de simetrie. Poziția centrului de greutate va fi definită de abscisa  $x_C$ .

Elementul de arie este sectorul infinitesimal,  $OMM'$ , asimilat unui triunghi isoscel.

$$dA = \frac{1}{2} OM' \cdot MM' = \frac{1}{2} R \cdot R d\theta = \frac{1}{2} R^2 d\theta$$

Centrul de greutate al acestui element de arie va fi situat pe mediana din  $O$ , la distanța  $2R/3$ . Rezultă abscisa centrului de greutate al elementului de arie  $OMM'$ :  $x = 2/3 R \cos \theta$

$$x_C = \frac{\int_{(A)} x dA}{\int_{(A)} dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R \cos \theta \cdot \frac{1}{2} R^2 d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} R^2 d\theta} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

În cazul particular al sectorului semicircular, în care  $\alpha = \pi/2$ , abscisa centrului de masă devine:

$$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$$

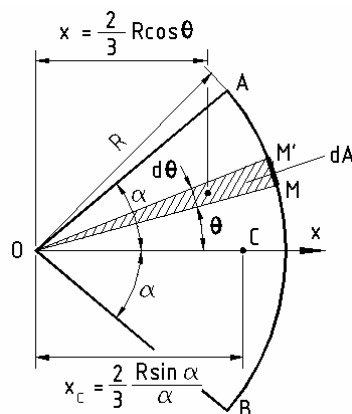


Fig. 3.3

3. Să se determine centrul de greutate al unui corp omogen, de forma unei emisfere cu raza  $R$  (fig.3.4).

*Rezolvare.* Corpul admite axa  $Oz$ , ca axă de simetrie, deci centrul de greutate situându-se pe această axă va fi definit de cota  $z_C$ . Pentru calculul coordonatei centrului de greutate,  $C$ , corpul se discretizează în volume elementare  $dV$ , de forma unor cilindri infinitesimali, obținuți prin secționarea emisferei cu planele de cotă,  $z$  și  $(z + dz)$ . Volumul elementar, de forma unui cilindru, având raza  $r$  și înălțimea  $dz$  este:

$$dV = \pi r^2 dz$$

$$r^2 = R^2 - z^2$$

$$dV = \pi(R^2 - z^2) dz$$

Volumul emisferei este:

$$V = \int_{(V)} dV = \int_0^R \pi(R^2 - z^2) dz = \pi \left( R^2 z \Big|_0^R - \frac{z^3}{3} \Big|_0^R \right) = \pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2\pi R^3}{3}$$

iar cota centrului de greutate  $z_C$  devine:

$$z_C = \frac{\int_{(V)} z dV}{\int_{(V)} dV} = \frac{\int_0^R z \cdot \pi(R^2 - z^2) dz}{\int_0^R \pi(R^2 - z^2) dz} = \frac{R^2 \frac{z^2}{2} \Big|_0^R - \frac{z^4}{4} \Big|_0^R}{R^2 z \Big|_0^R - \frac{z^3}{3} \Big|_0^R} = \frac{\frac{R^4}{4}}{\frac{2R^3}{3}} = \frac{3}{8} R$$

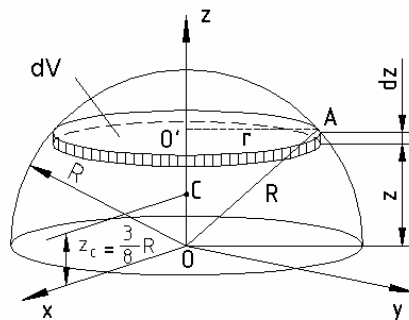


Fig. 3.4



4. Dintr-un cerc de rază  $R$  se decupează un cerc tangent interior de rază  $R/2$ . Să se determine poziția centrului de greutate a porțiunii rămase (fig.3.5).

*Rezolvare.* Sistemul admitând axa  $Oy$  ca axă de simetrie, conform primei proprietăți se va calcula doar ordonata centrului de greutate  $y_C$ .

$$y_C = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2}$$

unde  $A_1, A_2$  sunt ariile celor două cercuri iar  $y_1, y_2$  sunt ordonatele centrelor de greutate ale acestora, raportate la sistemul de axe  $Oxy$  cu originea în centrul cercului de rază  $R$  ( $O \equiv C_1$ ).

$$\begin{cases} A_1 = \pi R^2, & y_1 = 0 \\ A_2 = \frac{\pi R^2}{4}, & y_2 = \frac{R}{2} \end{cases}$$

$$y_C = \frac{\pi R^2 \cdot 0 - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{R}{2}}{\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{-\frac{\pi R^3}{8}}{\frac{3\pi R^2}{4}} = -\frac{R}{6}$$

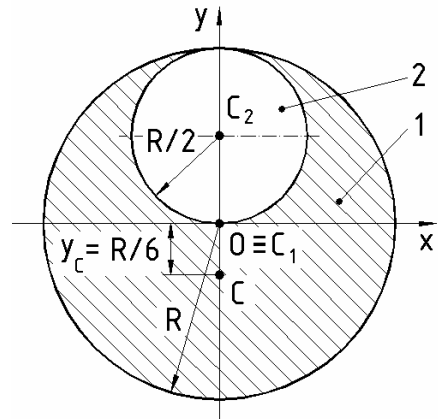


Fig. 3.5

5. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene, de formă și dimensiuni, indicate în figura 3.6.

*Rezolvare.* Întrucât corpul admite axa  $Oy$  ca axă de simetrie, poziția centrului de greutate va fi definită de ordonata acestuia,  $y_C$ . Placa omogenă din figura 3.6 s-a obținut prin adăugarea corpurilor 1 și 4, din care se extrag corpurile 2 și 3, fiecare având ariile și ordonatele centrelor de greutate, după cum urmează:

Corpul 1 – placa circulară de rază  $R = 20 \text{ cm}$

$$\begin{cases} A_1 = \pi R^2 = \pi \cdot 20^2 = 1256,64 \text{ cm}^2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Corpul 2 – placa semicirculară de rază  $r = 10 \text{ cm}$

$$\begin{cases} A_2 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 10^2}{2} = 157,08 \text{ cm}^2 \\ y_2 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 10}{3\pi} = 4,24 \text{ cm} \end{cases}$$

Corpul 3 – placa sectorială  $OADB$ , de rază  $R = 20 \text{ cm}$  și unghi la centru  $2\alpha = 2\pi/3$

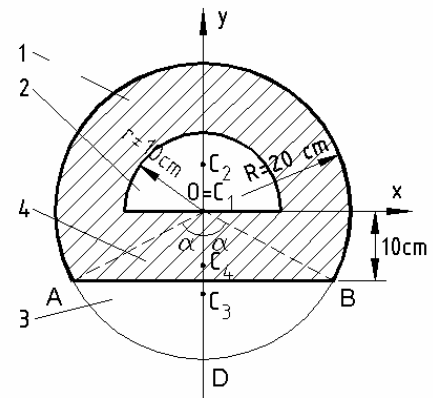


Fig. 3.6

$$A_3 = \alpha r^2 = \frac{\pi}{3} 20^2 = 418,66 \text{ cm}^2, \quad y_3 = -\frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} = -\frac{2}{3} 20 \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = -11,19 \text{ cm}$$

Corpul 4 – placa triunghiulară  $OAB$ , având unghiul în  $O$ ,  $2\alpha = 2\pi/3$ , înălțimea  $h = 10 \text{ cm}$  și lungimea bazei  $AB = 2R \sin \alpha = 2 \cdot 20 \cdot \sqrt{3}/2 = 34,64 \text{ cm}$ .

$$A_4 = \frac{1}{2} 34,64 \cdot 10 = 173,2 \text{ cm}^2, \quad y_4 = -\frac{2}{3} h = -\frac{2}{3} 10 = -6,66 \text{ cm}$$

Ordonata centrului de masă,  $y_C$ , a plăcii din figură este:

$$y_C = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_3 y_3 + A_4 y_4}{A_1 - A_2 - A_3 + A_4} = \frac{1256,64 \cdot 0 - 157,08 \cdot 4,24 - 418,66 \cdot (-11,19) + 173,20 \cdot (-6,66)}{1256,64 - 157,08 - 418,66 + 173,20} = 3,35 \text{ cm}$$

6. Capul unui nit are forma unei emisfere de rază  $R$ , iar corpul nitului este de forma unui cilindru de rază  $R/2$  și înălțime  $h = kR$ . Să se determine coeficientul  $k$ , astfel încât centrul de masă al nitului să fie situat la distanța  $l = R/2$ , față de planul de separare dintre cele două elemente (fig.3.7).

*Rezolvare.* Întrucât nitul admite axa  $Oy$  ca axă de simetrie, centrul de masă se va afla pe această axă. Constanta  $k$  se va determina din condiția ca valoarea ordonatei centrului de masă să fie  $l = R/2$ .

Nitul este compus din două corpuri având volumele și ordonatele centrelor de masă, după cum urmează:

*Corpul 1 – capul nitului*

$$V_1 = \frac{2}{3} \pi R^3, \quad y_1 = -\frac{3}{8} R$$

*Corpul 2 – corpul nitului*

$$\begin{cases} V_2 = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 h = \frac{k\pi R^3}{4} \\ y_2 = \frac{h}{2} = \frac{kR}{2} \end{cases}$$

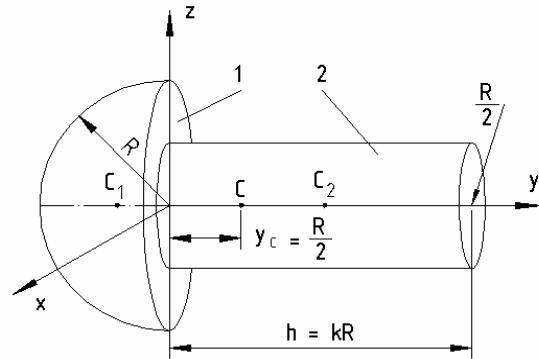


Fig. 3.7

Ordonata centrului de masă a nitului este:

$$y_C = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V_1 + V_2} = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3 \left(-\frac{3}{8} R\right) + \frac{k\pi R^3}{4} \frac{kR}{2}}{\frac{2}{3} \pi R^3 + \frac{k\pi R^3}{4}} = \frac{3}{2} \frac{k^2 - 2}{8 + 3k} R$$

Din condiția  $y_C = R/2$ , obținem:

$$\frac{3}{2} \frac{k^2 - 2}{3k + 8} R = \frac{1}{2} R \quad \text{sau} \quad k^2 - 3k - 14 = 0, \quad \text{respectiv, } k = 2,72$$

### TEST DE EVALUARE

1. Centrul de greutate al unui sistem material reprezintă:
  - a. punctul unde acționează greutatea sistemului
  - b. centrul forțelor paralele de greutate ale sistemului

- c. punctul al cărui vector de poziție este dat de relația:  $\bar{r}_C = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i}$

2. Centrul de masă este echivalent cu centrul de greutate:
  - a. nu
  - b. da
  - c. în condițiile în care centrul de greutate depinde de modul de distribuție al maselor sistemului
3. Momentul static al unui sistem material în raport cu un reper (planul  $Oxy$ ) este:
  - a.  $S_{0xy} = \sum_i m_i z_i$
  - b.  $S_{0xy} = M \cdot z_C$
  - c.  $S_{0xy} = \sum_i G_i z_i$
4. Dacă momentul static  $S_{0xy} = \sum_i m_i z_i$  este nul, centrul de greutate se află:
  - a. în planul  $Oxy$
  - b. în planul  $Oxz$
  - c. în nici unul din planele menționate
5. Dacă momentele statice  $S_{0xy} = \sum_i m_i z_i$  și  $S_{0xz} = \sum_i m_i y_i$  sunt nule, centrul de greutate se află:
  - a. pe axa  $Ox$
  - b. pe axa  $Oy$
  - c. pe axa  $Oz$
6. Poziția centrului de greutate al unui sistem de plăci omogene (corpuri cu două dimensiuni) este definită de relația:
  - a.  $\bar{r}_C = \frac{\sum_i M_i \bar{r}_{C_i}}{\sum_i M_i}$
  - b.  $\bar{r}_C = \frac{\sum_i A_i \bar{r}_{C_i}}{\sum_i A_i}$
  - c. nici una din variantele  $a$  sau  $b$
7. Poziția centrului de greutate al unui bloc omogen (corp cu trei dimensiuni) este definită de vectorul de poziție dat de relația:
  - a.  $\bar{r}_C = \frac{\int_{(D)} \bar{r} dm}{\int_{(D)} dm}$
  - b.  $\bar{r}_C = \frac{\int_{(V)} \bar{r} dV}{\int_{(V)} dV}$
  - c. oricare din variantele  $a$  și  $b$
8. Dacă un sistem material sau corp admite un plan de simetrie, centrul de greutate se află:
  - a. în dreapta planului de simetrie
  - b. în stânga planului de simetrie
  - c. în planul de simetrie

## 4. STATICA RIGIDULUI

### 4.1. ECHILIBRUL RIGIDULUI LIBER

Rigidul liber este un corp care poate ocupa orice poziție în spațiu, poziția acestuia depinzând exclusiv, de sistemul de forțe care acționează asupra lui.

Condiția necesară și suficientă pentru ca un rigid liber să fie în echilibru este ca torsorul sistemului de forțe care acționează asupra acestuia să fie nul în orice punct. De regulă, punctul față de care se calculează torsorul sistemului de forțe este originea  $O$  a sistemului de axe considerat.

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_0 = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Ținând seama că:

$$\begin{cases} \bar{R} = \sum_i \bar{F}_i \\ \bar{M}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_i \bar{M}_i \end{cases} \quad (4.2)$$

condițiile (4.1) devin:

$$\begin{cases} \sum_i \bar{F}_i = 0 \\ \sum_i \bar{M}_i = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

În cazul rigidului acționat de un sistem de forțe spațial (rigid în spațiu), ecuațiile scalare de echilibru sunt:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 \\ \sum_i F_{iz} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_i M_{ix} = 0 \\ \sum_i M_{iy} = 0 \\ \sum_i M_{iz} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

În cazul rigidului acționat de un sistem de forțe coplanar (rigid în plan), ecuațiile scalare de echilibru devin:

$$\sum_i F_{ix} = 0; \sum_i F_{iy} = 0; \sum_i M_{iz} = 0 \quad (4.5)$$

Problemele echilibrului rigidului liber pot fi grupate în două categorii:

- probleme în care se cunosc forțele care acționează asupra rigidului și se cere determinarea poziției lui de echilibru;
- probleme în care se cunoaște poziția de echilibru și se cer forțele care acționează asupra rigidului.

Aceste probleme pot fi rezolvate în general, dacă ele comportă determinarea a cel mult șase necunoscute scalare, în cazul rigidului acționat de un sistem de forțe spațiale sau cel mult trei necunoscute scalare, în cazul rigidului acționat de un sistem de forțe coplanare.

În cazul problemelor din prima categorie, poziția de echilibru a rigidului poate fi determinată. Această poziție este definită de șase parametri scalari independenți, pentru rigidul în spațiu și de trei parametri scalari independenți, pentru rigidul în plan care se numesc *grade de libertate*.

Pentru stabilirea poziției unui rigid în spațiu este necesar să se cunoască coordonatele a trei puncte necoliniare:  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$  și  $A_3(x_3, y_3, z_3)$ . Aceste coordonate nu sunt independente deoarece distanțele  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ , dintre puncte rămân constante, corpul fiind nedeformabil.

$$\begin{cases} A_1 A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = d_1 \\ A_2 A_3 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2} = d_2 \\ A_3 A_1 = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2} = d_3 \end{cases} \quad (4.6)$$

Întrucât între cei nouă parametri scalari,  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ , pot fi scrise trei relații de forma (4.6), rezultă că doar șase sunt independenți. În concluzie, poziția unui rigid liber în spațiu este definită de șase parametri independenți. *Rigidul liber în spațiu are șase grade de libertate*.

*Practic, numărul gradelor de libertate este dat de numărul deplasărilor (translații și rotații) independente în raport cu axele de coordonate (fig.4.1).*

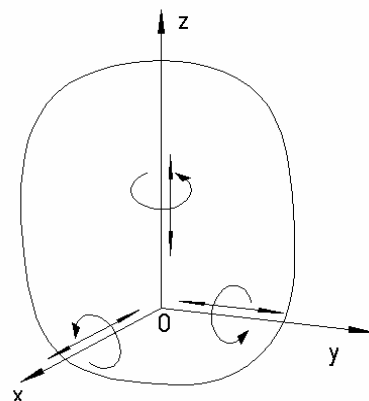


Fig. 4.1

Numărul gradelor de libertate pentru un rigid liber în spațiu poate fi dat și de următorii șase parametri scalari independenți (fig. 4.2):

- coordonatele  $x_0, y_0, z_0$ , ale originii  $O$ , a sistemului de axe  $Oxyz$ , solidar cu rigidul, în raport cu triedrul fix  $O_1x_1y_1z_1$ ;
- unghiurile Euler:  $\psi$  - unghiul de precesie (unghiul dintre axa  $Ox'$ , paralelă cu axa  $O_1x_1$  și linia nodurilor  $ON$  - intersecție a planelor  $Ox'y'$  și  $Oxy$ ),  $\varphi$  - unghiul de rotație proprie (unghiul dintre linia nodurilor  $ON$  și axa  $Ox$ ) și  $\theta$  - unghiul de nutație (unghiul dintre axa  $Oz'$ , paralelă cu  $O_1z_1$  și axa  $Oz$ ).

În cazul rigidului în plan (considerând rigidul în planul  $Oxy$ ) este necesar să se cunoască poziția a două puncte  $A_1(x_1, y_1)$  și  $A_2(x_2, y_2)$ . Scriind distanța  $d$ , dintre cele două puncte care este constantă, obținem:

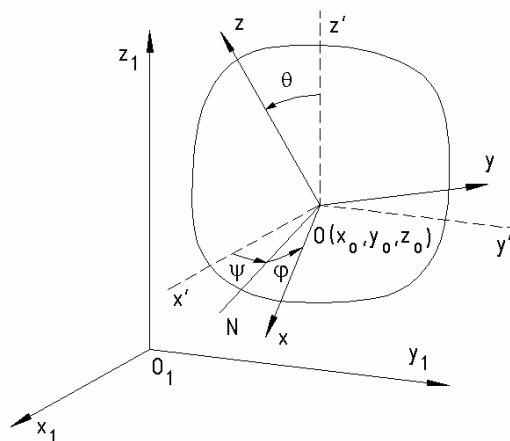


Fig.4.2

$$A_1 A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d \quad (4.7)$$

Rezultă că din cei patru parametri scalari,  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , care definesc poziția rigidului în plan, doar trei sunt independenți. Rigidul liber în plan are trei grade de libertate.

Problemele din a doua categorie pot fi rezolvate, dacă numărul necunoscutelor scalare, necesare pentru determinarea forțelor este de cel mult șase, pentru rigidul în spațiu sau de cel mult trei, pentru rigidul în plan.

## 4.2. ECHILIBRUL RIGIDULUI SUPUS LA LEGĂTURI FĂRĂ FRECARĂ

### 4.2.1. GENERALITĂȚI

Rigidul supus la legături este corpul căruia i se impune o restricție geometrică. Pentru studiul echilibrului rigidului supus la legături se aplică axioma legăturilor, în baza căreia, legătura este înlăturată și înlocuită cu efectul mecanic al acesteia, forțele și momentele corespunzătoare.

Prin această operație, problema este redusă la cea a rigidului liber. Rigidul supus la legături este acționat de:

- forțe și momente exterioare, direct aplicate
- forțe și momente de legătură.

Se consideră corpul (C), căruia i se studiază echilibrul, care are ca legături, corpul (C<sub>1</sub>) (fig.4.3). Torsorul de reducere în punctul teoretic de contact, O, al forțelor exterioare  $\mathcal{I}_0$  este constituit din  $\bar{\mathcal{R}}$  și  $\bar{\mathcal{M}}_0$  iar al forțelor de legătură  $\tau_0$  este format din  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_0$ .

$$\mathcal{I}_0 \begin{Bmatrix} \bar{\mathcal{R}} \\ \bar{\mathcal{M}}_0 \end{Bmatrix} \quad \tau_0 \begin{Bmatrix} \bar{R} \\ \bar{M}_0 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

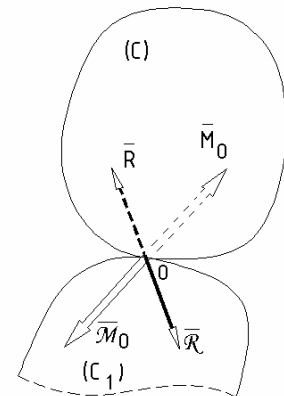


Fig. 4.3

Condiția de echilibru se exprimă cu ecuațiile vectoriale (4.9), care în cazul general conduc la șase ecuații scalare de echilibru.

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{R}} + \bar{R} = 0 \\ \bar{\mathcal{M}}_0 + \bar{M}_0 = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

### 4.2.2. LEGĂTURILE RIGIDULUI

Legăturile rigidului sunt: reazemul simplu, articulația, încastrarea și prinderea cu fir.

În studiul legăturilor rigidului se urmăresc două aspecte: unul geometric, referitor la numărul gradelor de libertate și altul mecanic legat de elementele mecanice cu care se înlocuiesc legăturile; pentru fiecare legătură se vor studia cele două aspectele legate de:

- numărul gradelor de libertate rămase rigidului după aplicarea legăturii, indicând posibilitățile de mișcare independentă;
- forțele și momentele pe care le introduce legătura.

Întrucât se neglijează forțele de frecare care se dezvoltă în legături, aceste legături se numesc *ideale* sau *legături fără frecare*.

#### 4.2.2.1. REAZEMUL SIMPLU

Reazemul simplu este legătura prin care un punct al rigidului este obligat să rămână permanent pe o suprafață dată.

Datorită rigidității, corpurile rezemate nu se pot întrepătrunde și deci din cele șase mișcări simple pe care le poate efectua un rigid liber, rezemarea suprimă translația după direcția normală la planul tangent comun celor două corpuri în contact, numit plan de rezemare.

Un rigid rezemat are *cinci grade de libertate*. Considerând suprafața de rezemare ca fiind planul  $Oxy$ , cele cinci grade de libertate ale rigidului sunt: trei rotații în jurul axelor  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  și două translații în lungul axelor  $Ox$ ,  $Oy$ , translația după axa  $Oz$  fiind suprimată de legătură (fig.4.4.a). Din punct de vedere geometric, reazemul reduce numărul gradelor de libertate cu o unitate.

Efectul mecanic al sistemului de forțe aplicat corpului ( $C$ ) este reprezentat prin tursorul acestora, în punctul teoretic de contact  $O$ ,  $\mathcal{T}_O(\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{M}}_O)$ . Cele două elemente ale tursorului se descompun după două direcții:

- normala comună celor două corpuri în punctul de rezemare  $On$ ;
- dreptele  $Ot_1$  și  $Ot_2$ , obținute ca intersecție dintre planul  $[P]$ , tangent în punctul teoretic de contact cu planele definite de normala  $On$  și vectorul  $\bar{\mathcal{R}}$ , respectiv  $On$  și vectorul  $\bar{\mathcal{M}}_O$  (fig.4.4.b).

Rezultă:

$$\mathcal{T}_O \begin{cases} \bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}}_n + \bar{\mathcal{R}}_t \\ \bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_n + \bar{\mathcal{M}}_t \end{cases} \quad (4.10)$$

Componenta  $\bar{\mathcal{R}}_n$  produce deplasarea corpului ( $C$ ), pe direcția normalei la legătură.

Componenta  $\bar{\mathcal{R}}_t$  produce deplasarea corpului ( $C$ ) pe corpul legătură ( $C_1$ ), după direcția  $Ot_1$ , situată în planul tangent  $[P]$ , numită *alunecare*.

Componenta  $\bar{\mathcal{M}}_n$  produce rotirea corpului ( $C$ ) pe corpul legătură

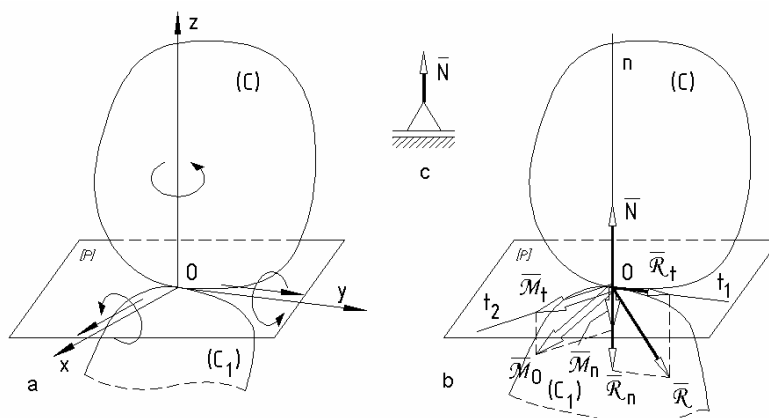


Fig. 4.4

( $C_1$ ), în jurul normalei comune celor două corpuri,  $On$ , numită *pivotare*.

Componenta  $\overline{M}_t$  produce rotirea corpului ( $C$ ) pe corpul legătură ( $C_1$ ), în jurul axei  $Ot_2$ , situată în planul tangent  $[P]$ , numită *rostogolire*.

Dintre deplasările posibile ale rigidului ( $C$ ), legătura ( $C_1$ ) nu poate limita decât deplasarea pe direcția normală la legătură, datorită rigidității celor două corpuri, în sensul pătrunderii corpului ( $C$ ), în corpul ( $C_1$ ), dacă legătura este *unilaterală* și în ambele sensuri (de a pătrunde și de a părăsi legătura) dacă legătura este *bilaterală*. Lipsa frecării dintre cele două corpuri crează posibilitatea efectuării celorlalte mișcări.

Reazemul simplu acționează asupra corpului ( $C$ ), cu o forță de legătură normală pe suprafața de rezemare,  $\overline{N}$ , numită *reacțiune normală*. Privitor la sensul reacțiunii normale  $\overline{N}$ , acesta poate fi stabilit numai în cazul legăturii unilaterale, când sensul lui  $\overline{N}$  este acela în care corpul poate părăsi legătura.

Torsorul în  $O$ , al forțelor de legătură este format din reacțiunea normală,  $\tau_0(\overline{N})$ .

Condiția de echilibru este exprimată prin ecuațiile vectoriale:

$$\begin{cases} \overline{R}_n + \overline{N} = 0 \\ \overline{R}_t = \overline{M}_n = \overline{M}_t = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Reazemul simplu se notează simbolic printr-un triunghi, având unul din vârfuri în punctul de rezemare iar latura opusă, perpendiculară pe reacțiunea normală (fig.4.4.c).

#### 4.2.2.2. ARTICULAȚIA

Articulația este legătura prin care rigidului  $i$  se fixează *un punct*, și se numește *articulație sferică*, sau *o axă*, caz în care se numește *articulație cilindrică*.

##### 4.2.2.2.1. ARTICULAȚIA SFERICĂ

Un rigid ( $C$ ) este articulat sferic, când o extremitate acestuia este prevăzută cu o sferă care pătrunde într-o cavitate asemănătoare, practică în corpul legătură ( $C_1$ ).

Poziția unui rigid cu un punct fix (fig.4.5.a) este determinată de trei parametri scalari, corpul având *trei grade de libertate*: rotațiile corpului ( $C$ ), în raport cu cele trei axe ale sistemului de coordonate.

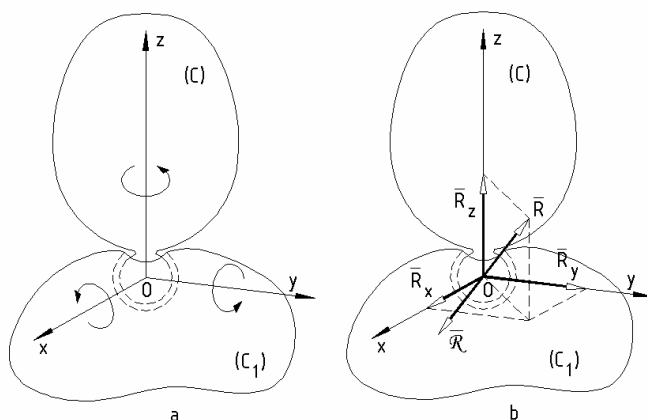


Fig. 4.5



Din punct de vedere geometric, articulația sferică reduce numărul gradelor de libertate ale unui rigid, cu trei unități (translațiile corpului (C), în raport cu cele trei axe de coordonate).

Pentru studiul echilibrului rigidului se consideră torsorul forțelor direct aplicate în punctul O,  $\mathcal{I}_O(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}_O)$ . Rezultanta forțelor exterioare,  $\overline{\mathcal{R}}$  are tendința de a imprima corpului (C), o deplasare, în raport cu corpul legătură ( $C_l$ ). Momentul resultant  $\overline{\mathcal{M}}_O$  tinde să rotească corpul (C), în raport cu legătura ( $C_l$ ). Datorită lipsei frecărilor în articulația sferică nu exista cupluri care să se opună acestei mișcări.

Conform principiului acțiunii și al reacțiunii, efectul mecanic al articulației sferice asupra rigidului (C) este o forță  $\overline{R}$ , de mărime și direcție necunoscută (fig.4.5.b). Se preferă să se lucreze cu proiecțiile forței  $\overline{R}$  pe direcțiile axelor sistemului de coordonate  $Oxyz$ :  $R_x, R_y, R_z$ .

Torsorul forțelor de legătură în punctul O este constituit din rezultanta forțelor de legătură,  $\tau_O(\overline{R} = \overline{R}_x + \overline{R}_y + \overline{R}_z)$ . Condiția de echilibru este exprimată prin ecuațiile vectoriale:

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{R}} + \overline{R} = 0 \\ \overline{\mathcal{M}}_O = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

sau prin cele șase ecuații scalare de echilibru:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_x + R_x = 0; \mathcal{R}_y + R_y = 0; \mathcal{R}_z + R_z = 0 \\ \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_y = \mathcal{M}_z = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

#### 4.2.2.2. ARTICULAȚIA CILINDRICĂ

În cazul *articulației cilindrice spațiale*, extremitatea O, a corpului (C) este prevăzută cu un cilindru (*fus*), montat coaxial în interiorul unei cavități, de asemenea cilindrică (*lagăr*), practică în corpul legătură ( $C_l$ ), în raport cu care se poate roti și deplasa (fig.4.6.a).

Cele două mișcări posibile, rotația și translația în raport cu axa articulației  $Oz$ , ale corpului (C) în raport cu legătura ( $C_l$ ) constituie cele două grade de libertate ale rigidului.

Din punct de vedere geometric, articulația cilindrică spațială reduce numărul gradelor de libertate ale rigidului, cu patru unități.

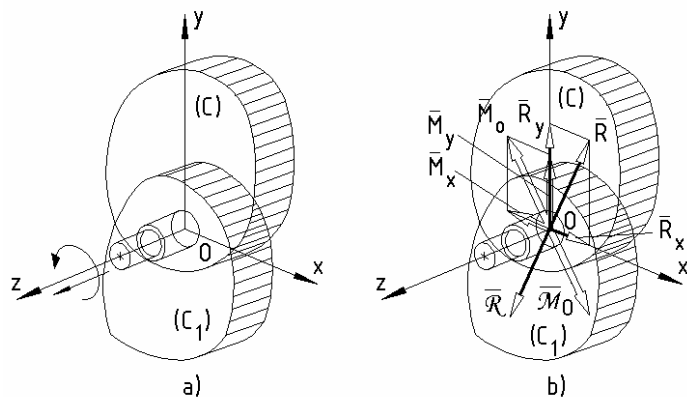


Fig. 4.6

Din punct de vedere mecanic, o articulație cilindrică poate fi înlocuită cu o forță  $\bar{R}$  și un cuplu de moment  $\bar{M}_0$ , ambele de mărimi necunoscute, situate într-un plan normal la axa articulației  $Oz$ . Se lucrează cu componentele pe axe ale celor două elemente ale torsorului forțelor de legătură (fig.4.6.b.)

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y \\ \bar{M}_0 = \bar{M}_x + \bar{M}_y \end{cases} \quad (4.14)$$

Cum torsorul în punctul  $O$  al forțelor direct aplicate rigidului (C), exprimat prin componente pe axele sistemului triortogonal  $Oxyz$  este:

$$\mathcal{I}_O \begin{cases} \bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}}_x + \bar{\mathcal{R}}_y + \bar{\mathcal{R}}_z \\ \bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{\mathcal{M}}_x + \bar{\mathcal{M}}_y + \bar{\mathcal{M}}_z \end{cases} \quad (4.15)$$

condițiile vectoriale de echilibru pot fi exprimate cu ajutorul relațiilor (4.9).

Proiectate pe axele sistemului  $Oxyz$ , ecuațiile vectoriale (4.9) conduc la șase ecuații scalare de echilibru:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_x + R_x = 0 \\ \mathcal{R}_y + R_y = 0 \\ \mathcal{R}_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{M}_x + M_x = 0 \\ \mathcal{M}_y + M_y = 0 \\ \mathcal{M}_z = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Pentru evitarea blocării fusului în lagăr sunt luate măsuri atât din punct de vedere constructiv, cât și al solicitării rigidului, astfel încât momentul din legătură,  $\bar{M}_0$  să fie nul. În aceste condiții, torsorul forțelor de legătură este constituit doar din rezultanta forțelor de legătură,  $\tau_0(\bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y)$ . iar ecuațiile scalare de echilibru (4.16) devin:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_x + R_x = 0; \mathcal{R}_y + R_y = 0 \\ \mathcal{R}_z = \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_y = \mathcal{M}_z = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

În aplicațiile practice se întâlnește cazul când rigidul, articulat cilindric este acționat de un sistem de forțe, situate într-un plan normal la axa de rotație sau corpul este o placă plană, normală la axa articulației (fig.4.6.a). Este cazul rigidului în plan, când traslația în lungul axei nefiind posibilă, singura mișcare rămâne rotația în raport cu axa articulației, corpul având *un singur grad de libertate*.

*Articulația cilindrică plană* limitează deplasarea pe direcția normală la axa articulației, introducând într-o problemă de statica rigidului, două necunoscute: mărimea reacțiunii  $|\bar{R}|$  și direcția acesteia, dată de unghiul  $\alpha$ , format cu o direcție de referință. Se preferă să se lucreze cu componentele reacțiunii  $\bar{R}$  pe două direcții perpendiculare (orizontală și verticală),  $\bar{H}$  și  $\bar{V}$  (fig.4.7.b).

În acest caz, elementele torsorului forțelor direct aplicate și al forțelor de legătură sunt:

$$\mathcal{I}_O \begin{cases} \bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}}_x + \bar{\mathcal{R}}_y \\ \bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_z = \mathcal{M}_O \bar{k} \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\tau_O(\bar{R} = \bar{H} + \bar{V})$$

Condițiile vectoriale de echilibru ale rigidului în plan sunt:

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{R}} + \bar{R} = 0 \\ \bar{\mathcal{M}}_O = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

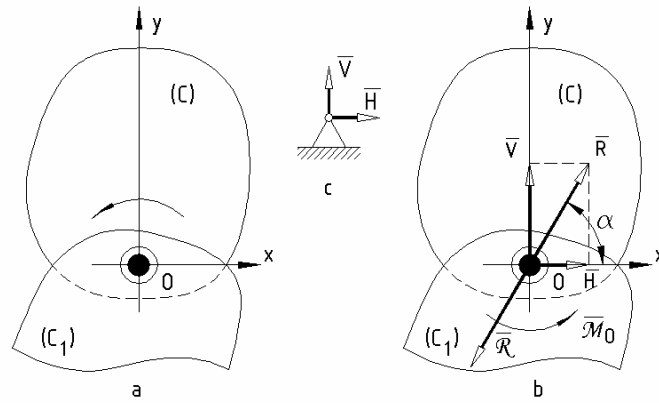


Fig. 4.7

Proiectate pe axele sistemului  $Oxy$ , în care se află rigidul, ecuațiile vectoriale de echilibru (4.19) devin:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_x + H = 0; \mathcal{R}_y + V = 0 \\ \mathcal{M}_O = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Reprezentarea simbolică se realizează ca și la reazem, printr-un triunghi, cu un cerc în vârf, în care converg cele două reacțiuni  $\bar{H}$  și  $\bar{V}$  (fig.4.7.c).

### 4.2.2.3. ÎNCASTRAREA

Încastrarea este legătura prin care un corp este fixat în alt corp (corpul legătură), astfel încât nu este permisă nici o deplasare. Din definiția încastrării rezultă că sunt suprimate toate gradele de libertate ale rigidului (C).

Pentru studiul forțelor și momentelor dintr-o încastrare este necesar să se ia în considerare, forțele de legătură locale  $\bar{R}_i$ , pe care legătura ( $C_l$ ) le exercită asupra rigidului (C), în regiunea în care acestea vin în contact (fig.4.8.a).

Torsorul în punctul O (de obicei, centrul de greutate al secțiunii transversale a corpului în dreptul încastrării) al forțelor direct aplicate,  $\mathcal{I}_O$  și cel al forțelor de legătură,  $\tau_O$  au expresiile:

$$\mathcal{I}_O \begin{cases} \bar{\mathcal{R}} = \sum_i \bar{F}_i \\ \bar{\mathcal{M}}_O = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \sum_i \bar{R}_i \\ \bar{M}_O = \sum_i \bar{r}_i' \times \bar{R}_i \end{cases}$$

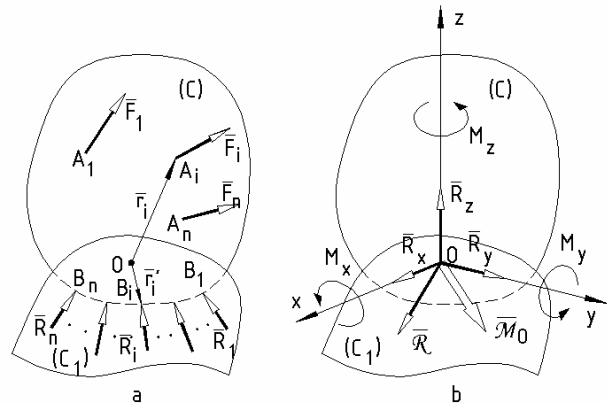


Fig. 4.8

Vectorii  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_O$  au mărimile, suporturile și sensurile, necunoscute și în consecință vor fi înlocuiți prin componente după direcții cunoscute.

Când forțele direct aplicate rigidului încastrat constituie un sistem de forțe spațial, încastrarea se numește *spațială*, iar când sistemul de forțe care acționează asupra rigidului constituie un sistem de forțe coplanar sau corpul este o placă plană, încastrarea se numește *plană*.

Din punct de vedere geometric, *încastrarea spațială* reduce numărul gradelor de libertate cu șase unități.

În cazul încastrării spațiale, elementele tursorului în  $O$ , al forțelor de legătură  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_O$  se exprimă prin componentele pe cele trei axe ale sistemului  $Oxyz$ , care se opun celor șase posibilități de mișcare, fiind introduse șase necunoscute scalare:  $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$  (fig.4.8.b). Elementele tursorului în punctul  $O$ , ale forțelor direct aplicate și de legătură au expresiile:

$$\mathcal{I}_O \begin{cases} \bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y + \bar{R}_z \\ \bar{M}_O = \bar{M}_x + \bar{M}_y + \bar{M}_z \end{cases} \quad \tau_O \begin{cases} \bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y + \bar{R}_z \\ \bar{M}_O = \bar{M}_x + \bar{M}_y + \bar{M}_z \end{cases} \quad (4.22)$$

Ecuatiile scalare de echilibru ale rigidului încastrat spațial devin:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_x + R_x = 0 \\ \mathcal{R}_y + R_y = 0 \\ \mathcal{R}_z + R_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{M}_x + M_x = 0 \\ \mathcal{M}_y + M_y = 0 \\ \mathcal{M}_z + M_z = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Din punct de vedere geometric, *încastrarea plană* reduce numărul gradelor de libertate cu trei unități.

În cazul încastrării plane, considerând ca plan al forțelor, planul  $Oxy$ , elementele tursorului în  $O$ , ale forțelor de legătură,  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_O$  se exprimă prin componentele pe axele sistemului  $Oxy$ , care se opun celor trei posibilități de mișcare, fiind introduse trei necunoscute scalare:  $H, V$  și  $M_O$  (fig.4.9). Elementele tursorului în  $O$ , ale forțelor direct aplicate și de legătură sunt:

$$\mathcal{I}_O \begin{cases} \bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y \\ \bar{M}_O = \bar{M}_z = M_O \bar{k} \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \bar{H} + \bar{V} \\ \bar{M}_O = \bar{M}_z = M_O \bar{k} \end{cases}$$

Ecuatiile scalare de echilibru ale rigidului încastrat plan sunt:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_x + H = 0 \\ \mathcal{R}_y + V = 0 \\ \mathcal{M}_O + M_O = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

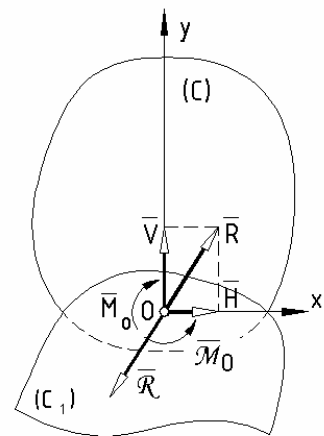


Fig. 4.9

#### 4.2.2.4. PRINDEREA CU FIR

Legătura prin fir este o legătură specială, fiind echivalentă cu o rezemare unilaterală a unui punct material, pe o sferă de rază egală cu lungimea firului. Prinderea cu fir se înlocuiește cu o forță care are ca suport, firul, sensul fiind îndreptat spre punctul de suspendare al firului (întinde porțiunea de fir, legată de rigid (fig.4.10).

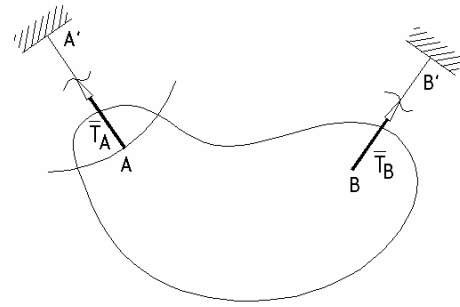


Fig. 4.10

*Observații:*

- Suma dintre numărul gradelor de libertate, rămase rigidului după aplicarea legăturii și numărul reacțiunilor introduse de legătură este egală cu șase, pentru rigidul în spațiu (acționat de un sistem de forțe spațiale) și trei, pentru rigidul în plan (acționat de un sistem de forțe coplanare).
- Dacă o reacțiune reprezentată într-un sens arbitrar rezultă din calcule, negativă, semnul minus indică faptul că, în realitate, aceasta acționează în sens contrar celui considerat.
- Întrucât, pentru rigidul în plan ( $Oxy$ ) nu se reprezintă sistemul de axe, la scrierea ecuațiilor scalare de echilibru se stabilește următoarea convenție: axa  $Ox$  reprezintă axa orizontală cu sensul pozitiv spre dreapta, axa  $Oy$  reprezintă axa verticală cu sensul pozitiv îndreptat în sus, iar originea sistemului de axe este dată de punctul față de care se calculează momentele forțelor, considerate pozitive dacă sensul de rotație al acestora este antiorar.

**Aplicații. 1.** O bară  $AB$  de greutate neglijabilă este suspendată de un cablu  $CD$  și suportă o încărcătură  $G = 400 \text{ daN}$ , în punctul  $E$ . Extremitățile  $A$  și  $B$  ale barei sunt în contact cu doi pereți verticali netezi. Dimensiunile fiind indicate în figura 4.11, să se determine reacțiunile pereților din  $A$  și  $B$ , precum și tensiunea din cablul  $CD$ .

*Rezolvare.* Conform axiomei legăturilor, se înlocuiesc reazemele din  $A$  și  $B$ , cu reacțiunile normale  $\bar{N}_A$  și  $\bar{N}_B$ , perpendiculare pe pereții verticali iar cablul  $CD$ , cu tensiunea  $\bar{T}_C$ , având ca suport, cablul. Ecuațiile scalare de echilibru sunt:

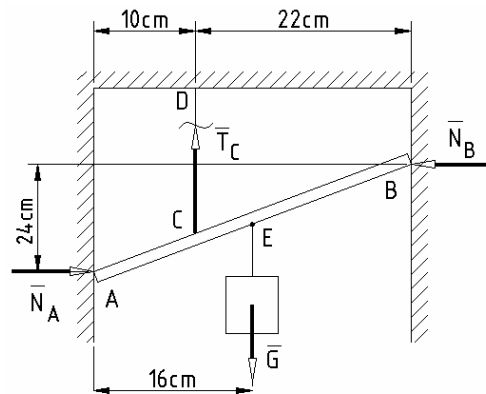


Fig. 4.11

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : N_A - N_B = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : T_C - G = 0 \\ \sum_i M_{iA} = 0 : 10T_C - 16G + 24N_B = 0 \end{cases}$$

Valorile reacțiunilor sunt:  $T_C = G = 400 \text{ daN}$ ;  $N_A = N_B = (16G - 10T)/24 = 100 \text{ daN}$

*Observație:* Condiția de echilibru este ca torsorul forțelor direct aplicate și din legături, calculat într-un punct oarecare  $A$  să fie nul și având în vedere că sistemul de forțe care acționează asupra barei  $AB$  este în plan ( $Oxy$ ), rezultă cele trei ecuații scalare de mai sus.

2. O placă omogenă de greutate  $\bar{P}$  având forma și dimensiunile indicate în figura 4.12 este rezemată în punctele  $A$ ,  $D$  și  $F$ . Să se calculeze reacțiunile din reazeme.

*Rezolvare.* Conform axiomei legăturilor se înlătură legăturile, introducându-se forțele de legătură, respectiv reacțiunile reazemelor care au direcție normală la suprafața plăcii.

Pentru calculul reacțiunilor se utilizează relațiile (4.29):

Pentru scrierea ecuațiilor de momente în raport cu axele  $Ox$  și  $Oy$  este necesară determinarea poziției centrului de greutate  $C$  a plăcii, definită de coordonatele  $x_C$  și  $y_C$ .

Placa reprezentată poate fi considerată ca fiind constituită din două plăci pătrate cu centrele de greutate  $C_1$  și  $C_2$ , și laturile  $a$ , respectiv  $2a$ , având următoarele caracteristici:

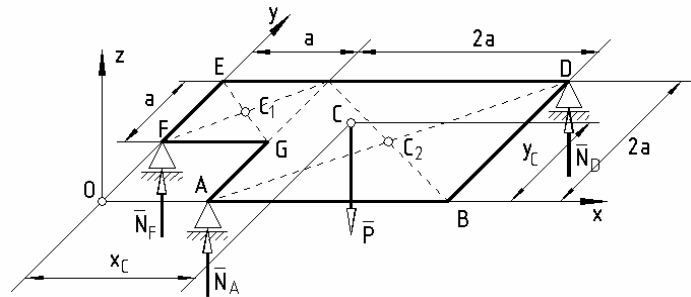


Fig.4.12.

$$\begin{cases} \text{Corpul 1: } A_1 = a^2; & x_1 = 0,5a; & y_1 = 1,5a \\ \text{Corpul 2: } A_2 = 4a^2; & x_2 = 2a; & y_2 = a \end{cases}$$

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{a^2 \cdot 0,5a + 4a^2 \cdot 2a}{a^2 + 4a^2} = \frac{8,5a^3}{5a^2} = 1,7a$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{a^2 \cdot 1,5a + 4a^2 \cdot a}{a^2 + 4a^2} = \frac{5,5a^3}{5a^2} = 1,1a$$

Ecuațiile de echilibru ale plăcii sunt:

$$\begin{cases} \sum_i F_{iz} = 0: & N_A + N_D + N_F - P = 0 \\ \sum_i M_{ix} = 0: & N_D \cdot 2a + N_F \cdot a - P \cdot y_C = 0 \\ \sum_i M_{iy} = 0: & -N_A \cdot a - N_D \cdot 3a + P \cdot x_C = 0 \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{cases} N_A + N_D + N_F - P = 0 \\ 2aN_D + aN_F - 1,1aP = 0 \\ aN_A + 3aN_D - 1,7aP = 0 \end{cases}$$

Valorile reacțiunilor devin:

$$N_A = 0,35P; \quad N_D = 0,45P; \quad N_F = 0,2P$$

3. Scara  $AB$ , de lungime  $l$  și greutate  $G$ , fixată în capătul  $A$ , printr-o articulație, situată la înălțimea  $h$  deasupra solului poate fi ridicată cu ajutorul unui cablu, fixat în capătul  $B$  și trecut peste un scripete mic  $C$ , situat la aceeași înălțime (fig.4.13). Distanța dintre punctele  $A$  și  $C$ , fiind  $AC = l$ , să se determine mărimea forței  $\bar{F}$  din cablu, necesară ridicării scării și reacțiunile articulației  $A$ . Se dau:  $G = 40 \text{ daN}$ ,  $l = 4 \text{ m}$ ,  $h = 3,5 \text{ m}$ .

*Rezolvare.* Introducând forțele de legătură din  $A$  și  $B$ , reacțiunile orizontală și verticală,  $\bar{H}_A, \bar{V}_A$ , respectiv tensiunea din cablul,  $\bar{T}$  și având în vedere că forțele care acționează asupra scării sunt coplanare, ecuațiile scalare de echilibru devin:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : -H_A + T \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : V_A - G + T \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \\ \sum_i M_{iA} = 0 : -G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha + T \cdot 2l \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

În sistemul ecuațiilor de echilibru se adaugă relația,  $T = F$ , din considerentul că tensiunea din cablu este constantă și egală cu forța care acționează în capătul liber al acestuia. Rezolvând sistemul rezultă valorile reacțiunilor:

$$\alpha = \arcsin \frac{3,5}{4} = \frac{\pi}{3}; \quad F = \frac{G \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 5,77 \text{ daN};$$

$$H_A = F \sin \frac{\alpha}{2} = 2,87 \text{ daN}; \quad V_A = G - F \cos \frac{\alpha}{2} = 35 \text{ daN}$$

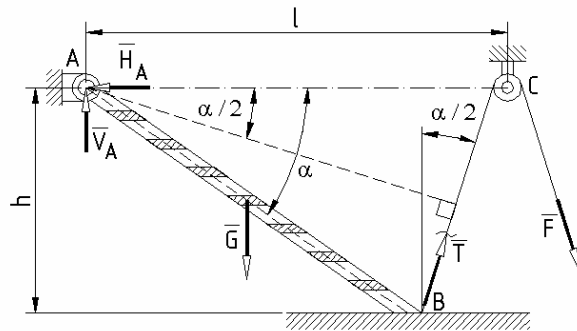


Fig. 4.13

4. Bara cotită  $OABC$ , încastrată în  $O$  este formată din barele orizontale  $OA$  și  $AB$ , perpendiculare între ele și din bara verticală  $BC$ , toate de lungime  $l$  și greutate  $\bar{G}$ . Asupra barei acționează în punctele  $B$  și  $C$ , forțele  $\bar{P}_1$  și  $\bar{P}_2$ , paralele cu barele  $OA$ , respectiv  $AB$ , având sensurile din figura 4.14. Cunoscând mărimile celor două forțe,  $P_1 = G$  și  $P_2 = 2G$ , să se determine reacțiunile încastrării  $O$ .

*Rezolvare.* Înlocuind încastrarea spațială  $O$  cu forțele și momentele de legătură corespunzătoare, mărimile acestora vor rezulta din condiția ca torsorul în punctul  $O$ , al forțelor direct aplicate și de legătură, care acționează asupra barei, să fie nul. Deoarece forțele care acționează asupra barei constituie un sistem de forțe spațial, se vor scrie șase ecuații scalare de echilibru. Reamintim că încastrarea spațială introduce trei forțe de legătură,  $R_x, R_y, R_z$  și trei cupluri de legătură,  $M_x, M_y, M_z$ .

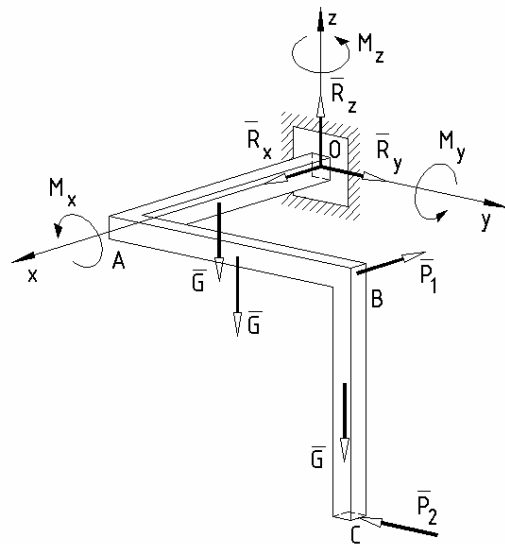


Fig. 4.14

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : R_x - P_1 = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : R_y - P_2 = 0 \\ \sum_i F_{iz} = 0 : R_z - 3G = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_i M_{ix} = 0 : M_x - Gl/2 - Gl - P_2 = 0 \\ \sum_i M_{iy} = 0 : M_y + Gl/2 + 2Gl = 0 \\ \sum_i M_{iz} = 0 : M_z + P_1l - P_2l = 0 \end{cases}$$

Rezultă valorile reacțiunilor:

$$\begin{cases} R_x = G \\ R_y = 2G \\ R_z = 3G \end{cases} \quad \begin{cases} M_x = 3,5Gl \\ M_y = -2,5Gl \\ M_z = Gl \end{cases}$$

Semnul minus, obținut pentru momentul  $M_y$  indică faptul că acesta acționează în sens contrar celui presupus inițial.

5. O macara de cale ferată are ecartamentul  $AB = 1,5 \text{ m}$ . Greutatea platformei, corpului și brațului macaralei precum și pozițiile acestora față de planul median al ecartamentului sunt indicate în figura 4.15. Sarcina maximă la cârligul macaralei este de  $50 \text{ kN}$ , raza maximă de acțiune fiind de  $5 \text{ m}$ . Să se determine mărimea contragreutății  $\bar{Q}$  și distanța  $x$ , față de planul median, astfel ca macaraua să nu se răstoarne în situațiile de lucru, cele mai defavorabile.

*Rezolvare.* Mărimea contragreutății  $\bar{Q}$  cât și poziția acesteia față de planul median rezultă din condiția de funcționare a macaralei în cele mai defavorabile situații.

1. Macaraua fără sarcină la cârlig, cu tendința de răsturnare pe roata A ( $\bar{N}_A = 0$ ).
2. Macaraua cu sarcină maximă la cârlig și rază de acțiune maximă, cu tendința de răsturnare pe roata B ( $\bar{N}_B = 0$ ).

Ecuatiile de echilibru limită pentru cele două situații sunt:

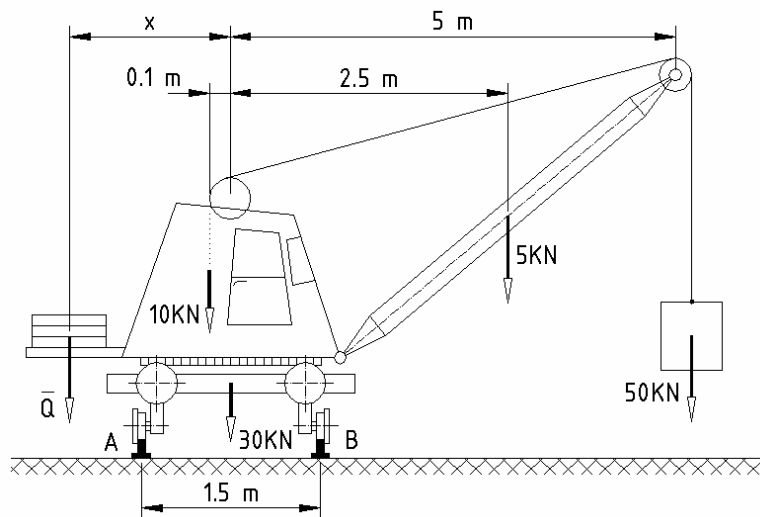


Fig. 4.15

$$\begin{cases} \sum_i M_{iA} = 0 : Q(x - \frac{1,5}{2}) - 10(\frac{1,5}{2} - 0,1) - 30\frac{1,5}{2} - 5(1,5 + 2,5) = 0 \\ \sum_i M_{iB} = 0 : Q(x + \frac{1,5}{2}) + 10(\frac{1,5}{2} + 0,1) + 30\frac{1,5}{2} - 5(2,5 - \frac{1,5}{2}) - 50(5 - \frac{1,5}{2}) = 0 \end{cases}$$

Rezultă:  $Q = 96,66 \text{ kN}$ ,  $x = 1,22 \text{ m}$

### 4.3. ECHILIBRUL RIGIDULUI SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARÉ

#### 4.3.1. GENERALITĂȚI ASUPRA FENOMENULUI DE FRECARÉ

În paragraful precedent s-au prezentat legăturile fără frecare ale rigidului. În această ipoteză s-a stabilit că un corp rezemat pe un altul ar trebui să se pună în mișcare, atunci când rezultanta forțelor exterioare ar avea o componentă  $\bar{R}_t$ , oricât de mică, cuprinsă în planul tangent la cele două corpuri, în punctul comun



de contact. Această situație nu se întâlnește în realitate, întrucât forța trebuie să depășească o anumită limită, pentru a pune corpul în mișcare.

Explicația fizică se bazează pe faptul că în realitate, corpurile sunt deformabile și ca urmare vin în contact, nu într-un singur punct  $O$ , ci pe o suprafață, pe care forțele de legătură au o anumită distribuție, greu de stabilit.

Suprafețele de contact prezintă asperități, care sub acțiunea forțelor se întrepătrund și se deformează, intervenind și forțele de adeziune care apar între moleculele corpurilor în contact (fig.4.16).

Torsorul forțelor direct aplicate,  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ , în punctul teoretic de contact  $O$ , este:

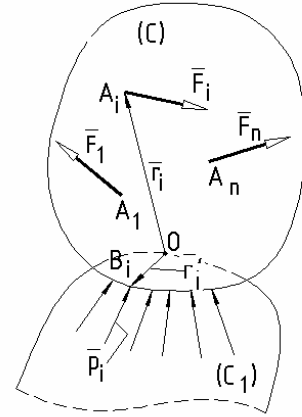


Fig.4.16

$$\mathcal{I}_O \begin{cases} \bar{\mathcal{R}} = \sum_i \bar{F}_i \\ \bar{\mathcal{M}}_O = \sum_i \overline{OA_i} \times \bar{F}_i \end{cases} \quad (4.26)$$

Torsorul în punctul  $O$ , al forțelor de legătură  $\bar{p}_i$ , aplicate în punctele  $A_i$  este:

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \sum_i \bar{p}_i \\ \bar{M}_O = \sum_i \overline{OB_i} \times \bar{p}_i \end{cases} \quad (4.27)$$

Condiția de echilibru este exprimată de ecuațiile vectoriale (4.9).

Pentru a studia aceste forțe și momente se descompune fiecare element al torsorului, atât al forțelor direct aplicate cât și al forțelor de legătură, în câte două componente: una dirijată după normala comună  $On$  și alta cuprinsă în planul tangent  $[P]$ , în punctul teoretic de contact  $O$  (fig.4.17).

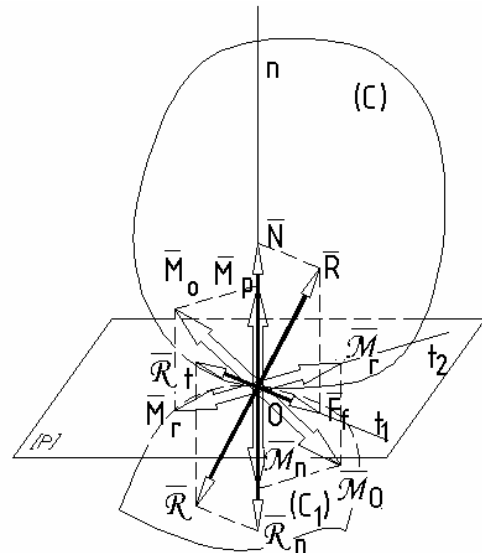


Fig. 4.17

$$\mathcal{I}_O \begin{cases} \bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}}_n + \bar{\mathcal{R}}_t \\ \bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_n + \bar{\mathcal{M}}_t \end{cases} \quad \tau_O \begin{cases} \bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_f \\ \bar{M}_O = \bar{M}_p + \bar{M}_r \end{cases} \quad (4.28)$$

Forța  $\bar{\mathcal{R}}_n$  tinde să deplaseze corpul (C) în direcția normală la suprafața de contact, deplasare împiedicată de reacțiunea normală  $\bar{N}$ .

Forța  $\bar{\mathcal{R}}_t$  tinde să deplaseze corpul (C) în planul tangent la suprafața de sprijin. Această deplasare poartă numele de *alunecare* și este împiedicată de reacțiunea  $\bar{F}_f$  numită *forță de frecare de alunecare*.

Cuplul de moment  $\overline{\mathcal{M}}_n$  are tendința de a roti corpul (C) în jurul normalei la suprafața de contact. Această rotație se numește *pivotare* și este împiedicată de cuplul de moment  $\overline{\mathcal{M}}_p$  denumit *moment de frecare de pivotare*.

Cuplul de moment  $\overline{\mathcal{M}}_t$  are tendința de a roti corpul (C) în jurul unei axe din planul tangent la suprafața de contact. O asemenea rotație poartă numele de *rostogolire* și este împiedicată de cuplul de moment  $\overline{\mathcal{M}}_r$  denumit *moment de frecare de rostogolire*.

Ecuatiile vectoriale corespunzătoare echilibrului corpului (C) sunt:

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{R}}_n + \overline{N} = 0 \\ \overline{\mathcal{R}}_t + \overline{F}_f = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{\mathcal{M}}_n + \overline{\mathcal{M}}_p = 0 \\ \overline{\mathcal{M}}_t + \overline{\mathcal{M}}_r = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

De la cazul general se poate trece la cazurile particulare mai importante.

### 4.3.2. FRECAREA DE ALUNECARE

Se consideră cazul când tursorul forțelor direct aplicate și cel al forțelor de legătură care acționează asupra corpului (C), în punctul teoretic de contact  $O$  au ca elemente numai forța rezultantă.

$$\mathcal{I}_O(\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}}_n + \overline{\mathcal{R}}_t) \quad \tau_O(\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}_f) \quad (4.30)$$

În cazul echilibrului cu frecare (fig.4.18), reacțiunea  $\overline{R}$  este înclinată față de normala  $On$ , deoarece, pe lângă componenta normală  $\overline{N}$  are și o componentă în planul tangent,  $\overline{F}_f$ , egală și de sens contrar, componenteii pe această direcție, a rezultantei forțelor direct aplicate,  $\overline{\mathcal{R}}_t$ . Această forță  $\overline{F}_f$  se numește *forță de frecare de alunecare*, are ca punct de aplicație, punctul teoretic de contact  $O$ , direcția corespunzătoare tendinței de mișcare, iar sensul, opus acestei tendințe. Forța de frecare de alunecare nu este o forță preexistentă, ea se produce numai când corpul are tendința de alunecare.

Din cercetările experimentale făcute asupra frecării de alunecare, Coulomb și-a formulat concluziile, cunoscute sub numele de *legile frecării*.

1. *Mărimea forței de frecare maximă, corespunzătoare stării de echilibru limită, este proporțională cu mărimea reacțiunii normale, coeficientul de proporționalitate  $\mu < 1$  se numește coeficient de frecare de alunecare.*
2. *În primă aproximație, coeficientul de frecare de alunecare nu depinde de viteza de alunecare și de mărimea reacțiunii normale; depinde de natura și gradul de prelucrare al suprafețelor în contact.*

Prin *stare de echilibru limită* se definește starea mecanică caracterizată de faptul că forțele își fac echilibru iar mișcarea este iminentă.

În baza acestor legi, forța de frecare de alunecare are expresia:

$$|\overline{F}_f| \leq \mu |\overline{N}| \begin{cases} F_{f \min} = 0 \\ F_{f \max} = \mu N \end{cases} \quad (4.31)$$

Forța minimă de frecare se realizează atunci când nu există tendință de alunecare, iar cea maximă, în momentul începerii mișcării.

Din figura 4.18 putem scrie:

$$F_{f \max} = N \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (4.32)$$

Din relațiile (4.44) și (4.45) rezultă:

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi \quad (4.33)$$

unde  $\varphi$  se numește *unghi de frecare*.

Prin rotirea completă a suportului reacțiunii  $\bar{R}_{lim}$  în jurul normalei  $On$  se obține *conul de frecare* având ca axă, normala comună  $On$  și unghiul la vârf.  $2\varphi$ .

*Corpul (C) este în echilibru când reacțiunea  $\bar{R}$  este situată în interiorul conului de frecare, sau la limită, pe pânza acestuia.*

După Coulomb, forțele de frecare își au originea în existența la suprafața corpurilor a unor asperități, care în cazul a două corpuri în contact se întrepătrund. Când unul dintre corpuri se pune în mișcare, aceste asperități sunt strivite, forța de frecare fiind tocmai forța care se opune acestor striviri.

#### Observații

- Conform teoriei lui Coulomb, dacă se reduc înălțimile asperităților, forța de frecare de alunecare ar urma să scadă, fapt contrazis de realitate, întrucât forța de frecare de alunecare la un moment dat crește datorita intervenției altor fenomene, cum ar fi forțele de adeziune intermoleculare.
- Extinzând domeniul experiențelor făcute de Coulomb se constată variația coeficientului de frecare  $\mu$ , cu viteza, acesta scăzând cu creșterea vitezei. Valoarea coeficientului de frecare pentru corpurile în repaus  $\mu_0$ , numit *coeficient de aderență* este mai mare decât coeficientul de frecare pentru corpurile în mișcare  $\mu$ , numit *coeficient de frecare dinamic*. În acest sens se prezintă două cazuri: oțel pe oțel -  $\mu_0 = 0,25$ ,  $\mu = 0,1$ ; stejar pe stejar -  $\mu_0 = 0,55$ ,  $\mu = 0,35$ .

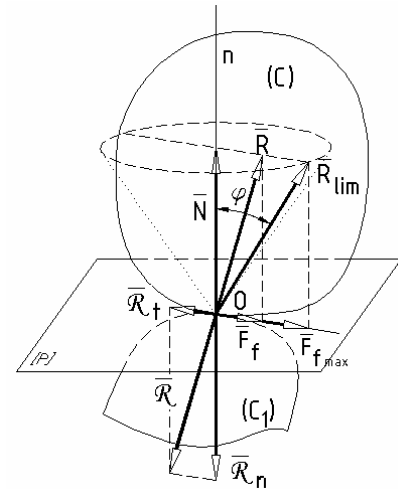


Fig. 4.18

### 4.3.3. FRECAREA DE ROSTOGOLIRE

Se consideră cazul când tursorul forțelor direct aplicate și cel al forțelor de legătură care acționează asupra corpului (C), în punctul teoretic de contact  $O$  (fig.4.19) au expresiile:

$$\mathcal{I}_O \begin{cases} \bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}}_n + \bar{\mathcal{R}}_t \\ \bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_t \end{cases} \quad \tau_O \begin{cases} \bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_f \\ \bar{M}_O = \bar{M}_r \end{cases} \quad (4.34)$$

Pentru echilibru este necesar ca:

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{R}} + \overline{R} = 0 \\ |\overline{\mathcal{M}_t}| \leq |\overline{M_r}| \end{cases} \quad (4.35)$$

Momentul  $\overline{\mathcal{M}_t}$  tinde să producă rostogolirea corpului (C) pe corpul ( $C_1$ ) și lui i se opune momentul de frecare de rostogolire  $\overline{M_r}$ .

Această situație este întâlnită în practică în cazul roților de autovehicule, al bilelor de rulmenți, etc.

Pentru studiul fenomenului frecării de rostogolire (în cazul roților de autovehicule) se consideră o roată de rază  $R$ , acționată de forța de tracțiune  $\overline{F}$  și de greutatea  $\overline{G}$  pe ax (fig.4.20).

În figura 4.20.a se presupune contactul dintre roată și planul orizontal, realizat într-un singur punct. În acest punct nu se pot introduce decât reacțiunea  $\overline{N}$  și forța de frecare  $\overline{F}_f$  iar ecuațiile de echilibru devin:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : F - F_f = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : N - G = 0 \\ \sum_i M_{i0} = 0 : -Fr = 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

Din ultima ecuație a sistemului (4.36) obținem  $F = 0$ , rezultat ce contrazice experiența, care arată că roata poate rămâne în repaus chiar dacă asupra ei acționează o forță orizontală  $\overline{F}$ , cu condiția ca valoarea acestei forțe să nu depășească o anumită limită.

Din cauza deformabilității, contactul între roată și calea de rulare se face pe o mică suprafață, numită și *pată de contact*, pe care apar reacțiuni normale  $\overline{n}$  și tangențiale  $\overline{t}$ , distribuite (fig.4.20.b).

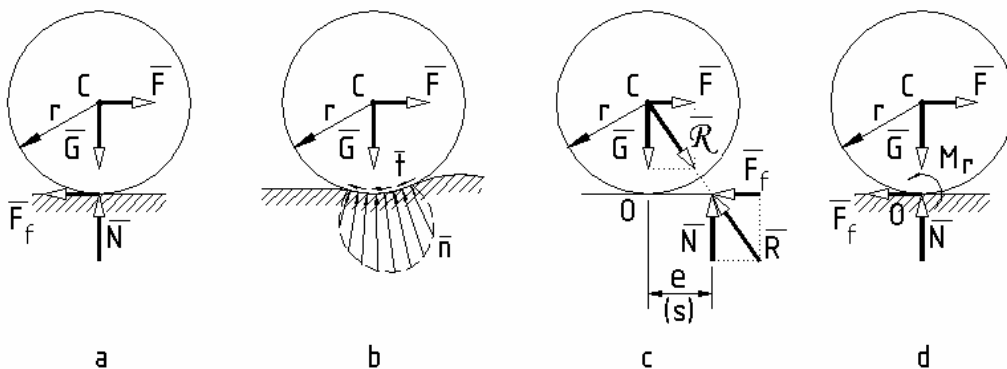


Fig. 4.20

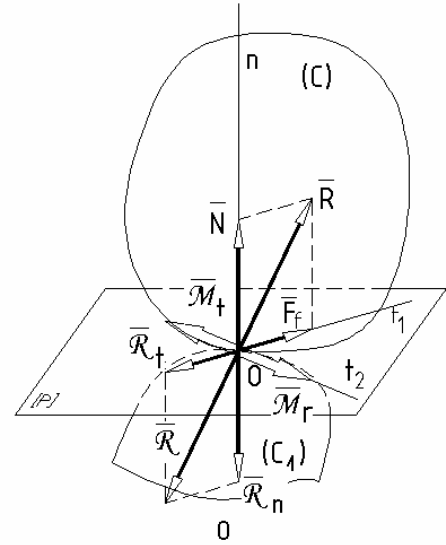


Fig. 4.19

Suportul rezultantei  $\bar{F}_f$  a reacțiunilor  $\bar{t}$  poate fi considerat cu o foarte bună aproximație că trece prin punctul  $O$ .

Suportul rezultantei  $\bar{N}$  a reacțiunilor normale  $\bar{n}$  se află la o distanță  $e$ , de punctul teoretic de contact  $O$ , situat în planul median al roții, determinată de faptul că zona de contact este asimetrică față de planul median, fiind mai mare în partea în care roata are tendința să se deplaseze (fig.4.20.c).

În cazul roților echipate cu pneuri, deplasarea suportului reacțiunii normale  $\bar{N}$  față de planul median se datorează și fenomenului de histerezis specific cauciucului (energia disipată prin comprimarea părții anterioare este mai mare decât energia recuperată prin întinderea părții posterioare a zonei deformată).

Pentru poziția de echilibru limită, distanța maximă cu care se deplasează suportul reacțiunii normale  $\bar{N}$ , față de  $O$  devine  $e_{max} = s$  și se numește *coeficient de frecare de rostogolire*.

Coeficientul de frecare de rostogolire are dimensiunea unei lungimi și valoarea sa depinde în general, de raza roții și natura materialelor. Astfel la roata de oțel pe șina de cale ferată,  $s \approx 0,5 \div 1 \text{ mm}$ , iar la bila de rulment pe inel,  $s \approx 0,005 \div 0,01 \text{ mm}$ .

Reducând forțele de legătură în punctul teoretic de contact  $O$  se obține situația din figura 4.20.d, unde apar: reacțiunea normală  $\bar{N}$ , forța de frecare de alunecare  $\bar{F}_f$  și momentul de frecare de rostogolire  $\bar{M}_r$ , opus ca sens tendinței de rostogolire, având mărimea,

$$|\bar{M}_r| \leq s|\bar{N}| \begin{cases} M_{rmin} = 0 \\ M_{rmax} = sN \end{cases} \quad (4.37)$$

Momentul minim de frecare de rostogolire se realizează atunci când nu există tendință de rostogolire, iar cel maxim, în momentul începerii rostogolirii.

Pentru activitatea practică este deosebit de important să subliniem condiția necesară pentru ca o roată să se deplaseze prin rostogolire fără alunecare (patinare) și anume, forța de frecare de alunecare care se dezvoltă între roată și calea de rulare să fie mai mică decât valoarea maximă,  $|\bar{F}_f| \leq \mu|\bar{N}|$ . Fără existența forței de aderență  $\bar{F}_f$ , nu ar fi posibilă rostogolirea roții, întrucât aceasta ar aluneca la cea mai mică valoare a forței de tracțiune  $\bar{F}$ .

#### 4.3.4. FRECAREA ÎN LAGĂRUL RADIAL (ARTICULAȚIA CILINDRICĂ)

Se urmărește determinarea momentului de frecare ce se dezvoltă într-o articulație cilindrică cu joc, în ipoteza simplificatoare a unei frecări uscate.

În figura 4.21 este prezentat lagărul presupus fix, într-un plan perpendicular pe axa de rotație, precum și fusul, adică partea din arbore care

intră în lagăr. Practic între lagăr și fus se interpune o piesă numită *bucșă*, fixată în lagăr și confecționată dintr-un material mai moale decât cel al fusului care să asigure o protecție la uzură a acestuia. Poziția de echilibru limită a fusului care se rotește când asupra lui acționează un cuplu  $\overline{M}$ , orientat după axa de rotație este caracterizată de unghiul  $\alpha$ .

Mișcarea fusului este o rostogolire în jurul generatoarei de contact care se deplasează față de punctul  $O$  (punctul de contact dintre fus și lagăr, în poziția de repaus) cu unghiul  $\alpha$ , în sensul de rostogolire. Mărimea acestui unghi depinde de aderența fusului pe lagăr, fusul rostogolindu-se până se va produce alunecarea, adică  $\alpha = \varphi$ , unde  $\varphi$  este unghiul de frecare dintre fus și lagăr.

Torsorul forțelor direct aplicate fusului, calculat pe axa acestuia  $C$  este constituit din forța  $\overline{F}$  orientată perpendicular pe axa fusului, adică după rază (de aici și denumirea de lagăr radial) și din momentul motor  $\overline{M}$ , orientat după axa acestuia. Mărimea acestui moment, numit moment motor trebuie să fie egal la limita echilibrului cu momentul de frecare din lagăr  $M_f$ .

Torsorul forțelor de legătură, calculat pe generatoarea de contact  $I$  (unde are loc un fenomen de frecare de alunecare și unul de rostogolire) este alcătuit din cele trei elemente specifice rezemării unei roți:  $\overline{N}$  - reacțiunea normală,  $\overline{F}_f$  - forța de frecare de alunecare și  $\overline{M}_r$  - momentul de frecare de rostogolire.

Considerând raza fusului  $r$ , ecuațiile de echilibru sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{ix} = 0 : F_f - F \sin \alpha = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : N - F \cos \alpha = 0 \\ \sum_i M_{iI} = 0 : M_r - M + Fr \sin \alpha = 0 \\ F_f \leq \mu N \\ M_r \leq sN \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Din primele trei ecuații ale sistemului (4.38) obținem,

$$\left\{ \begin{array}{l} N = F \cos \alpha \\ F_f = F \sin \alpha \\ M_r = M - Fr \sin \alpha \end{array} \right. \quad (4.39)$$

care introduse în inegalitățile sistemului (4.38) conduc la condițiile de echilibru:

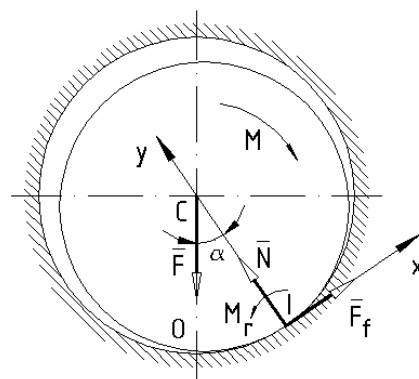


Fig. 4.21

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha \leq \mu \\ M \leq Fr(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha) \end{cases} \quad (4.40)$$

Pentru o bună funcționare se urmărește ca frecarea în lagăr să fie mică. În cazul echilibrului limită, conform primei relații (4.40) se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu = \operatorname{tg} \varphi \quad (4.41)$$

Unghiul  $\alpha$  fiind mic se pot face aproximațiile:

$$\begin{cases} \cos \alpha \approx \cos \varphi \cong 1 \\ \sin \alpha \approx \sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \cong \mu \end{cases} \quad (4.42)$$

Introducând aproximațiile (4.42) în a doua inegalitate (4.40) obținem:

$$M \leq Fr(\mu + \frac{s}{r}) \quad (4.43)$$

Notând coeficientul de frecare din lagăr:

$$\mu' = \mu + \frac{s}{r} \quad (4.44)$$

și făcând notațiile:

$$\begin{cases} M = M_f \\ F = \sqrt{H^2 + V^2} \end{cases} \quad (4.45)$$

introducând expresia coeficientului de frecare din lagăr (4.44) și notațiile (4.45) în relația (4.43) rezultă expresia *momentului de frecare din lagăr*.

$$M_f \leq \mu' r \sqrt{H^2 + V^2} \quad (4.46)$$

Explicația notațiilor (4.45) constă în faptul că, conform principiului acțiunii și al reacțiunii, momentul motor  $\bar{M}$ , la limita echilibrului este egal și de sens contrar cu momentul de frecare din lagăr  $\bar{M}_f$ , iar forța  $\bar{F}$  care reprezintă acțiunea fusului asupra lagărului este egală și direct opusă cu reacțiunea lagărului (articulației cilindrice)  $\bar{R} = \bar{H} + \bar{V}$ , care se descompune în plan în două componente, orizontală  $\bar{H}$  și verticală  $\bar{V}$ , ( $|\bar{R}| = \sqrt{H^2 + V^2}$ ).

Fenomenele de frecare care se produc într-un lagăr sunt mult mai complexe. Rezultatele obținute în analiza anterioară conduc la soluții care sunt acceptabile din punct de vedere calitativ, dar pentru mărirea preciziei calculului se impune determinarea, pe cale experimentală a coeficientului de frecare din lagăr  $\mu'$ .

În cazul *lagărului cu rulmenți* (fig.4.22.a) între fusul de rază  $r$  și lagăr are loc o rostogolire a bilelor de rulment. Într-un punct de contact  $A$ , între fus și una din bilele rulmentului (fig.4.22.b) torsorul forțelor de legătură este format din reacțiunea normală  $\bar{N}_i$ , forța de frecare  $\bar{F}_{fi}$  și cuplul de rostogolire,  $\bar{M}_{ri}$

Ecuția de echilibru a fusului devine:

$$\sum_i M_{iC} = 0 : \sum_i F_{fi} r + \sum_i M_{ri} - M = 0 \quad (4.47)$$

Pentru determinarea expresiilor  $F_{fi}$  și  $M_{ri}$  se consideră una din bilele rulmentului de rază  $r_l$ , acționată de forțele și cuplurile reprezentate în figura 4.22.c, greutatea proprie a bilelor se neglijează, fiind foarte mică în raport cu celelalte forțe.

Scriind ecuația de momente în raport cu centrul  $O_i$  al bilei  $i$ , rezultă:

$$\sum_i M_{O_i} = 0 : F_{fi} \cdot 2r_l - 2M_{ri} = 0 \quad (4.48)$$

Din relațiile (4.72) și (4.73) obținem:

$$M = \sum_i M_{ri} \left(1 + \frac{r}{r_l}\right) = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_l}\right) r \sum_i M_{ri} \quad (4.49)$$

Ținând seama că la limita echilibrului, momentul motor  $M$  este egal cu momentul de frecare din lagăr  $M_f$ , că suma reacțiunilor din lagăr  $\sum_i N_i$  reprezintă reacțiunea totală a

lagărului  $R$  și exprimând momentele de frecare de rostogolire  $M_{ri}$  în funcție de reacțiunile din lagăr  $N_i$ , pot fi scrise relațiile:

$$\begin{cases} M = M_f \\ \sum_i N_i = R = \sqrt{H^2 + V^2} \\ M_{ri} \leq s N_i \end{cases} \quad (4.50)$$

unde  $s$  este coeficientul de frecare de rostogolire dintre bilă și fus, respectiv lagăr.

Introducând relația (4.50) în (4.49), rezultă:

$$M_f \leq s \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_l}\right) r \sqrt{H^2 + V^2} \quad (4.51)$$

Notând  $\mu''$ , coeficientul de frecare din lagărul cu rulmenți, a cărui expresie este:

$$\mu'' = s \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_l}\right) \quad (4.52)$$

expresia momentului de frecare din lagărul cu rulmenți devine:

$$M_f \leq \mu'' r \sqrt{H^2 + V^2} \quad (4.53)$$

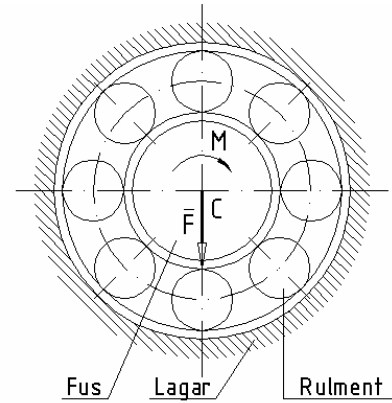


Fig. 4.22.a

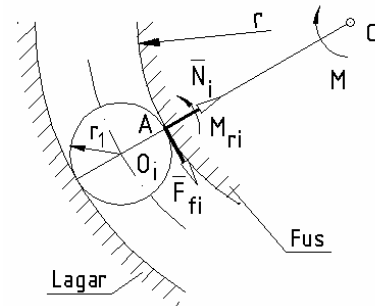


Fig. 4.22.b

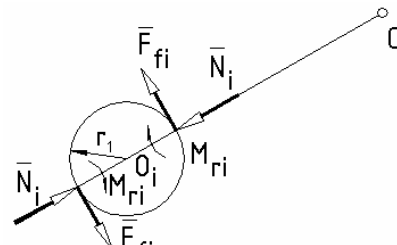


Fig. 4.22.c



Comparând expresiile coeficienților de frecare (4.44) când mișcarea relativă dintre fus și lagăr este o alunecare, cu (4.52) când mișcarea relativă între fus și lagăr este o rostogolire, se constată că:

$$\mu'' \ll \mu' \quad (4.54)$$

adică coeficientul de frecare de rostogolire este mult mai mic în cazul lagărului cu rulmenți decât în cazul lagărului cu bușă.

### 4.3.5. FRECAREA FIRELOR

Această frecare apare atât timp cât există tendința mișcării relative între firul și roata pe care se înfășoară.

Se consideră un fir petrecut peste un disc fix, pe arcu  $AB$ , căruia îi corespunde unghiul la centru  $\alpha$ , măsurat în radiani, coeficientul de frecare dintre fir și disc fiind  $\mu$  (fig.4.23.a). Presupunem că la una din extremitățile firului secționat acționează tensiunea  $\bar{T}_m$  care imprimă mișcarea firului pe disc, numită *tensiune motoare*, la cealaltă extremitate a firului acționând tensiunea  $\bar{T}_r$  care se opune acestei mișcări, numită *tensiune rezistentă*. În vederea determinării forței motoare minime  $T_m$ , care face posibilă alunecarea firului pe disc, în sensul dat de aceasta, se va discretiza firul, înfășurat pe arcu  $AB$ , în arce elementare  $ds$ , cărora le corespund la centru, unghiuri elementare  $d\varphi$ .

Se studiază *echilibrul limită* a elementului de fir, egal cu arcu elementar  $ds = MM'$ , acționat de tensiunile din capete,  $\bar{T}$ , respectiv  $\bar{T} + d\bar{T}$ , de reacțiunea normală elementară  $d\bar{N}$  și forța de frecare elementară  $d\bar{F}_f$  (fig.4.23.b).

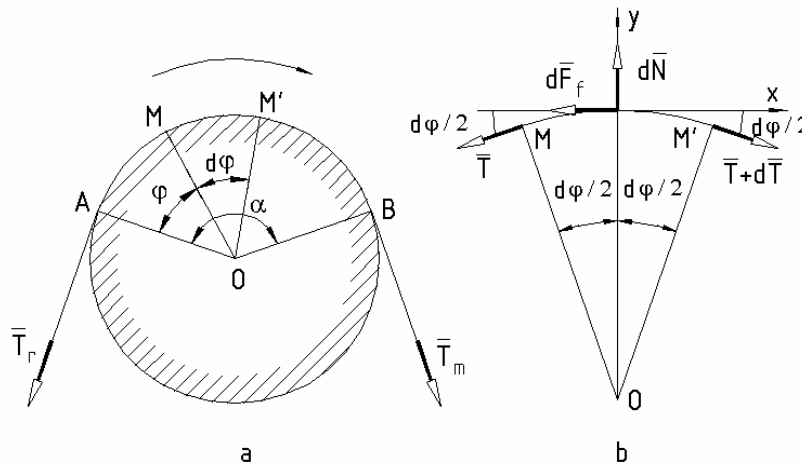


Fig. 4.23

Ecuatiile de echilibru ale elementului de fir sunt:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : (T + dT) \cos \frac{d\varphi}{2} - T \cos \frac{d\varphi}{2} - dF_f = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : dN - (T + dT) \sin \frac{d\varphi}{2} - T \sin \frac{d\varphi}{2} = 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

$$dF_f = \mu dN$$

Cum unghiul  $d\varphi$  este un infinit mic, pot fi scrise relațiile:

$$\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1; \sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}; dT \sin \frac{d\varphi}{2} \approx dT \frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (4.56)$$

Introducând relațiile (4.56) în (4.55) rezultă sistemul:

$$\begin{cases} dT - \mu \cdot dN = 0 \\ dN - T \cdot d\varphi = 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

respectiv ecuația diferențială, cu variabile separabile care se integrează în domeniul de variație al variabilelor  $T$  și  $\varphi$ .

$$\int_{T_r}^{T_m} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^\alpha d\varphi \Rightarrow \ln \frac{T_m}{T_r} = \mu \cdot \alpha \quad (4.58)$$

Trecând de la forma logaritmică la cea exponențială se obține relația cunoscută sub numele de *formula Euler pentru frecarea firelor*.

$$T_m = T_r e^{\mu\alpha}$$

sau, în general

$$T_m \leq T_r e^{\mu\alpha} \quad (4.59)$$

**Aplicații 1.** Un rezervor cilindric având greutatea  $G = 500 \text{ daN}$  și diametrul  $D = 2 \text{ m}$  este trecut peste o bordură de înălțime  $h = 0,5 \text{ m}$ . Pentru efectuarea acestei operații se înfășoară un cablu în jurul rezervorului și se trage orizontal ca în figura 4.24. Bordura fiind rugoasă, să se determine tensiunea din cablu  $F$ , necesară trecerii rezervorului și reacțiunea în  $A$  a bordurii,  $R_A$ .

*Rezolvare.* Bordura fiind un reazem cu frecare, reacțiunea acesteia  $R_A$  are două componente. Reacțiunea normală  $N$ , perpendiculară pe suprafața de contact (în acest caz, a corpului căruia i se studiază echilibrul) având direcție radială, orientată către centrul  $C$  și componenta  $F_f$ , tangentă la suprafața de contact având sensul contrar tendinței de alunecare a corpului pe bordură (fig.4.24).

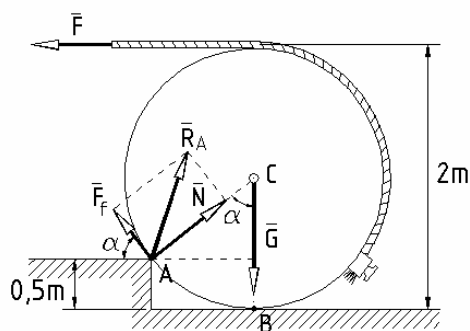


Fig. 4.24

Din condiția de echilibru rezultă sistemul de ecuații cu necunoscutele:  $N$ ,  $F$ , și  $F_f$ .

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : N \sin \alpha - F_f \cos \alpha - F = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : N \cos \alpha + F_f \sin \alpha - G = 0 \\ \sum_i M_{iA} = 0 : F \cdot D - G \cdot (AC) \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{(D/2) - h}{D/2} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \Rightarrow \alpha = \arccos(0,5) = \frac{\pi}{3}$$

sau:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}N - \frac{1}{2}F_f - F = 0 \\ \frac{1}{2}N + \frac{\sqrt{3}}{2}F_f - 500 = 0 \\ 2F - 500\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}$$

Rezultă mărimile necunoscute:

$$N = 687,5 \text{ daN}, F = 216.25 \text{ daN}, F_f \cong 180 \text{ daN}$$

**2. Roata trasă.** Se consideră roata unui vehicul, de rază  $r$  și greutate la ax,  $G$ , având coeficienții de frecare de alunecare  $\mu$  și de rostogolire  $s$ , trasă cu o forță  $F$ , pe un plan înclinat de unghi  $\alpha$  (fig.4.25). Să se determine valoarea maximă a forței de tracțiune  $F$  pentru echilibru.

*Rezolvare.* Izolând corpul se introduc forțele  $N$ ,  $F_f$  și momentul  $M_r$ , sensurile acestora fiind date de tendințele de alunecare în sens ascendent și rostogolire în sens orar.

Ecuatiile de echilibru sunt:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : F - G \sin \alpha - F_f = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : N - G \cos \alpha = 0 \\ \sum_i M_{i0} = 0 : M_r - Fr + Gr \sin \alpha = 0 \\ F_f \leq \mu N \\ M_r \leq sN \end{cases}$$

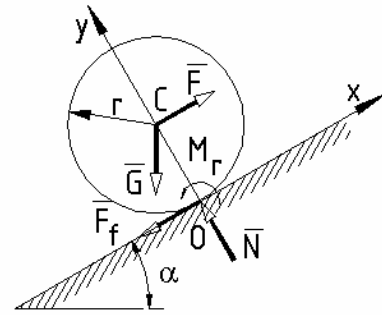


Fig. 4.25

Din primele trei relații deducem:

$$\begin{cases} N = G \cos \alpha \\ F_f = F - G \sin \alpha \\ M_r = (F - G \sin \alpha)r \end{cases}$$

care introduse în cele două inegalități conduc la condițiile de echilibru:

$$\begin{cases} F - G \sin \alpha \leq \mu G \cos \alpha \\ (F - G \sin \alpha)r \leq sG \end{cases}$$

sau explicitând în funcție de  $F$ :

$$\begin{cases} F \leq G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \\ F \leq G(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha) \end{cases}$$

Numai una din cele două condiții este hotărâtoare pentru menținerea echilibrului, și anume, cea mai mică:

- a. dacă  $\mu > \frac{s}{r}$ ,  $F \leq G(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha)$ , roata se va pune în mișcare prin rostogolire când  $F$  depășește această limită.

- b. dacă  $\mu < \frac{s}{r}$ ,  $F \leq G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ , roata se va pune în mișcare prin alunecare când  $F$  depășește această limită.

**2. Roata motoare.** Se consideră roata unui vehicul, de rază  $r$  și greutate la ax,  $G$ , având coeficienții de frecare de alunecare  $\mu$  și de rostogolire  $s$ , acționată cu o forță de tracțiune  $F$  și un cuplu motor  $M$ , pe un plan înclinat de unghi  $\alpha$  (fig.4.26). Să se determine valorile maxime ale forței de tracțiune  $F$  și ale cuplului motor  $M$  pentru echilibru.

*Rezolvare.* Sensurile forței de frecare de alunecare  $\bar{F}_f$  și ale momentului de frecare de rostogolire  $\bar{M}_r$  sunt date de forța  $\bar{F}$  și momentul  $\bar{M}$ . Pentru echilibru se scriu ecuațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{ix} = 0 : F_f - G \sin \alpha - F = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : N - G \cos \alpha = 0 \\ \sum_i M_{i0} = 0 : M_r - M + Fr + Gr \sin \alpha = 0 \\ F_f \leq \mu N \\ M_r \leq sN \end{array} \right.$$

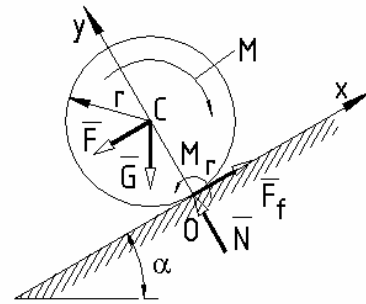


Fig. 4.26

Din primele trei relații deducem:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = G \cos \alpha \\ F_f = F + G \sin \alpha \\ M_r = M - (F + G \sin \alpha)r \end{array} \right.$$

care introduse în cele două inegalități conduc la condițiile de echilibru:

$$\left\{ \begin{array}{l} F - G \sin \alpha \leq \mu G \cos \alpha \\ M - (F + G \sin \alpha)r \leq sG \end{array} \right.$$

sau explicitând prima relație în funcție de  $F$  și a doua relație în funcție de  $M$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} F \leq G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) \\ M \leq \left[ F + G(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha) \right] r \end{array} \right.$$

Prima inegalitate exprimă condiția ca roata să nu alunece, condiție din care rezultă valoarea minimă a coeficientului de frecare de alunecare, pentru care este posibilă remorcarea.

$$\mu \geq \frac{F + G \sin \alpha}{G \cos \alpha}$$

Dacă  $\mu < \frac{F + G \sin \alpha}{G \cos \alpha}$ , tracțiunea nu este posibilă, oricât de mare ar fi valoarea

cuplului motor  $M$ . Un astfel de fenomen are loc în timpul iernii, când roțile motoare ale automobilului, aflându-se în contact cu zăpada înghețată se învârtesc pe loc fără ca automobilul să se poată deplasa, din cauza coeficientului de frecare mic dintre cauciuc și zăpada înghețată.

A doua inegalitate exprimă condiția ca roata să nu se rostogolească, condiție din care rezultă valoarea minimă cuplului motor  $M$ , pentru care este posibilă remorcarea:

$$M = \left[ F + G(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha) \right] r.$$

### TEST DE EVALUARE

1. Rigidul liber este:
  - a. un corp liber în spațiu
  - b. un corp a cărui poziție nu depinde de forțele care acționează asupra acestuia
  - c. un corp a cărui poziție este definită de forțele care acționează asupra acestuia
2. Câte grade de libertate are rigidul liber:
  - a. 6
  - b. 3
  - c.  $a$  sau  $b$ , după cum rigidul este situat în spațiu sau plan
3. Rigidul supus la legături este:
  - a. un corp căruia i se impune o restricție geometrică
  - b. un corp aflat în contact cu alt corp numit legătură
  - c. un corp a cărui mișcare este controlată de alte corpuri
4. Condiția de echilibru pentru un rigid supus la legături este:
  - a. taylorul forțelor de legătură să fie nul
  - b. taylorul forțelor direct aplicate să fie nul
  - c. taylorul forțelor direct aplicate și de legătură, în orice punct să fie nul
5. Un corp rezemat are:
  - a. 6 grade de libertate
  - b. 5 grade de libertate
  - c. 2 grade de libertate
6. Un corp încastrat are:
  - d. 6 grade de libertate
  - e. 3 grade de libertate
  - f. 0 grade de libertate
7. Starea de echilibru limită reprezintă:
  - a. starea mecanică în care rezultanta forțelor este nulă
  - b. starea mecanică în care taylorul sistemului de forțe este nul
  - c. starea mecanică în care forțele își fac echilibru, mișcarea fiind iminentă
8. Coeficientul de frecare de rostogolire  $s$  este:
  - a. o mărime dimensională
  - b. o mărime adimensională
  - c. o constantă independentă de materialul corpului care se rostogolește
9. Condiția de rostogolire fără alunecare este:
  - a.  $|\vec{F}_f| < \mu |\vec{N}|$
  - b.  $|\vec{F}_f| > \mu |\vec{N}|$
  - c. nu depinde de mărimea forței de frecare la alunecare, ci de deformabilitatea legăturii
10. În lagărul radial se manifestă următorul tip de frecare:
  - a. o frecare de alunecare
  - b. o frecare de rostogolire

c. o frecare complexă (rostogolire cu alunecare)

## 5. STATICA SISTEMELOR MATERIALE

Un ansamblu de puncte materiale sau corpuri solide aflate în interacțiune cu mediul înconjurător se numește *sistem material*.

Forțele care acționează un sistem material sunt:

- *Forțe exterioare* sistemului material care includ forțele direct aplicate și reacțiunile din legăturile exterioare sistemului.
- *Forțe interioare* sistemului material care includ forțele de interacțiune mecanică între elementele constitutive ale sistemului.

### 5.1. TORSORUL FORȚELOR INTERIOARE

Se consideră un sistem de corpuri a căror dimensiuni sunt neglijabile în raport cu distanțele dintre ele, respectiv un sistem de puncte materiale  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , din care vor fi luate în studiu, două puncte  $M_i$  și  $M_j$  (fig.5.1). Asupra punctului  $M_i$  acționează forțele exterioare  $\vec{F}_i$  și forțele interioare  $\vec{F}_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Conform principiului acțiunii și al reacțiunii, forțele interioare sunt egale în mărime și de sensuri opuse:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (5.1)$$

Considerând vectorii de poziție ai punctelor  $M_i$  și  $M_j$ , respectiv  $\vec{r}_i$  și  $\vec{r}_j$ , torsorul într-un punct oarecare  $O$ , al celor două forțe interioare este:

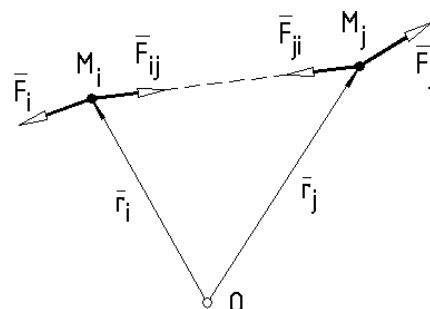


Fig. 5.1

$$\tau_O \begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0 \\ \vec{M}_O = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times (-\vec{F}_{ij}) = \\ = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \overline{M_j M_i} \times \vec{F}_{ij} = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Rezultatele obținute în relația (5.2) s-au bazat pe relația (5.1) și datorită coliniarității vectorilor  $\overline{M_j M_i}$  și  $\vec{F}_{ij}$  ( $\vec{F}_{ij} = \lambda \cdot \overline{M_j M_i}$ ). Se poate concluziona că, în orice punct, torsorul unei perechi de forțe interioare este nul.

Torsorul în punctul  $O$  al tuturor forțelor interioare care acționează asupra punctului  $M_i$  este:

$$\tau_{Oi} \begin{cases} \vec{R}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} \\ \vec{M}_{Oi} = \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij} \end{cases} \quad (5.3)$$

Generalizând pentru întreg sistemul material se poate scrie:

$$\tau_{0int} \begin{cases} \bar{R}_{int} = \sum_i \bar{R}_i = \sum_i \sum_j \bar{F}_{ij} = 0 \\ \bar{M}_{0int} = \sum_i \bar{M}_{0i} = \sum_i \bar{r}_i \times \sum_j \bar{F}_{ij} = \sum_i \sum_j \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Rezultatele obținute în relația (5.4) s-au bazat pe relația (5.2) și anume, forțele de legătură interioare formează pentru fiecare două puncte oarecare din sistem, sisteme de două forțe cu tursorul nul, în orice punct.

Rezultă următoarea concluzie: *în cazul unui sistem material, tursorul forțelor interioare este nul în orice punct.*

## 5.2. TEOREME ȘI METODE PENTRU STUDIUL ECHILIBRULUI SISTEMELOR MATERIALE

### 5.2.1. METODA IZOLĂRII ELEMENTELOR

Prin definiție, un sistem de puncte materiale este în echilibru dacă fiecare punct din sistem este în echilibru.

Cum asupra punctului  $M_i$  acționează forțele exterioare, a căror rezultantă este  $\bar{F}_i$  și forțele interioare de rezultantă  $\sum_j \bar{F}_{ij}$ , condiția de echilibru devine:

$$\bar{F}_i + \sum_j \bar{F}_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.5)$$

Rezultanta forțelor exterioare și interioare care acționează asupra punctului este nulă.

Conform acestei condiții se stabilește o metodă de rezolvare a problemelor de statica sistemelor materiale numită *metoda izolării elementelor*.

Prin această metodă, fiecare element constitutiv al sistemului, punct material sau solid se izolează din sistem și se studiază echilibrul acestuia sub acțiunea forțelor rezultând din acțiunea mediului exterior sistemului și din acțiunea celorlalte elemente din sistem.

### 5.2.2. TEOREMA SOLIDIFICĂRII

În vederea eliminării din calcule a forțelor interioare se utilizează *teorema solidificării*. Însușind ecuațiile (5.5), pentru toate punctele din sistem obținem:

$$\sum_i \bar{F}_i + \sum_i \sum_j \bar{F}_{ij} = 0 \quad (5.6)$$

Înmulțind vectorial relația (5.6) cu vectorul de poziție  $\bar{r}_i$ , al punctului  $M_i$  și însumând pentru toate punctele din sistem rezultă:

$$\sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum_i \sum_j \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} = 0 \quad (5.7)$$

Introducând în relațiile (5.6) și (5.7) rezultatele din (5.4) obținem condiția de echilibru a sistemului material:



$$\begin{cases} \sum_i \bar{F}_i = 0 \\ \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Cum torsorul în punctul  $O$  al forțelor exterioare care acționează asupra sistemului este:

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = \sum_i \bar{F}_i \\ \bar{M}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i \end{cases} \quad (5.9)$$

introducând relația (5.8) în (5.9) se obține sub o altă formă, condiția de echilibru a unui sistem material.

$$\tau_0 \begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_0 = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Relațiile (5.8) sau (5.10) exprimă condiția de echilibru a unui sistem material; *torsorul forțelor exterioare în orice punct al sistemului să fie nul*. Aceste relații, formal exprimă condiția de echilibru pentru solidul rigid și puteau fi scrise direct prin solidificarea legăturilor interioare sistemului, observație ce permite formularea *teoremei solidificării*.

*Dacă un sistem deformabil, liber sau supus la legături este în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare, atunci sistemul considerat ca rigid nedeformabil (prin solidificarea legăturilor interioare) este în echilibru sub acțiunea forțelor direct aplicate și din legăturile exterioare.*

În baza acestei teoreme se stabilește o metodă de rezolvare a problemelor staticii sistemelor materiale, *metoda solidificării*, prin aplicarea metodei de rezolvare a problemelor de statica rigidului, la sistemele materiale deformabile și nedeformabile.

Relațiile (5.8) sau (5.10) reprezintă pentru un sistem deformabil (distanțele dintre elemente se poate modifica), condiții necesare dar nu și suficiente, iar pentru un sistem nedeformabil reprezintă condiții necesare și suficiente deoarece reprezintă ecuațiile de echilibru pentru solidul rigid. E posibil ca la sistemele deformabile să fie îndeplinită condiția (5.10) dar echilibrul să nu fie asigurat întrucât această condiție nu atrage după sine și îndeplinirea condiției (5.5).

### 5.2.3. TEOREMA ECHILIBRULUI PĂRȚILOR

*Dacă un sistem material deformabil, liber sau supus la legături este în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare, atunci o parte oarecare din sistem considerată ca rigid nedeformabil este în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare corespunzătoare și a forțelor interioare reprezentând acțiunea restului sistemului asupra părții considerate.*

### 5.3. SISTEME STATIC DETERMINATE ȘI NEDETERMINATE

Ecuatiile de echilibru obținute prin cele trei metode nu sunt independente. Ecuatiile de echilibru obținute prin metoda solidificării și a echilibrului părților sunt combinații liniare ale ecuațiilor de echilibru obținute prin metoda izolării elementelor.

Numărul total al ecuațiilor de echilibru, independente pentru un sistem de  $n$  corpuri este de  $6n$  pentru sistemele spațiale și de  $3n$  pentru sistemele plane.

Dacă în rezolvarea anumitor probleme, ecuațiile de echilibru nu sunt suficiente, atunci este necesar să se scrie relații suplimentare, independente, de natură geometrică sau relații care dau mărimea forțelor și a momentelor de frecare, etc. Dacă și în această situație, numărul necunoscutelor este superior numărului ecuațiilor, sistemul se numește *static nedeterminat*. Numărul necunoscutelor care depășește numărul ecuațiilor reprezintă ordinul de nedeterminare. În acest caz, pe lângă ecuațiile de echilibru static se scriu și ecuații de echilibru elastic sau de deformații, studiate în mecanica rigidului deformabil (*Rezistența materialelor*).

**Aplicații. 1.** Sistemul din figura 5.2.a, realizat prin asamblarea stâlpului vertical  $AD$  cu grinda orizontală  $AF$  printr-o articulație în punctul  $B$  și prin cablul  $EC$  susține o greutate  $G = 1000\text{ N}$ , printr-un alt cablu prins de elementul vertical în  $H$  și trecut peste un scripete  $F$  de rază  $R$ . Dimensiunile ansamblului fiind indicate în figură să se determine pentru poziția de echilibru a sistemului:

1. Reacțiunile legăturilor  $A$  și  $D$ ;
2. Reacțiunea articulației  $B$  și tensiunea din cablul  $EC$ ;
3. Reacțiunea din axul scripetelui  $F$ .

**Rezolvare. 1.** Pentru calculul reacțiunilor din legăturile exterioare  $A$  și  $D$  se aplică *metoda solidificării*. Eliberând sistemul de legăturile exterioare, unde  $A$  reprezintă un rezem și  $D$  reprezintă o articulație cilindrică, introducând forțele de legătură corespunzătoare și scriind ecuațiile de echilibru, se obține:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: -N_A + H_D = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0: V_D - G = 0 \\ \sum_i M_{iD} = 0: 3N_A - 3G = 0 \end{cases}$$

Rezultă:  $N_A = H_D = V_D = 1000\text{ N}$

2. Reacțiunea articulației  $B$  și tensiunea din cablul  $EC$  se determină utilizând *metoda echilibrului părților*. În acest sens, din sistem se izolează subsistemul constituit din elementul orizontal  $EF$  și scripetele  $F$ , înlocuind legăturile interioare sistemului, respectiv articulația  $B$  și legăturile prin fir din punctele  $C$  și  $H$ , cu forțele de legătură corespunzătoare (fig.5.2.b), după care vor fi scrise ecuațiile de echilibru.

Ultima relație a sistemului a fost scrisă în baza proprietății că tensiunea din cablu este o mărime constantă și are valoarea forței care acționează în capătul liber al acestuia.

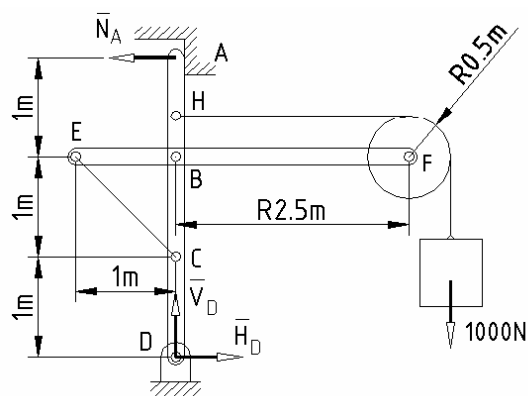


Fig. 5.2.a

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : \frac{\sqrt{2}}{2} T_{EC} + H_B - T = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : V_B - \frac{\sqrt{2}}{2} T_{EC} - G = 0 \\ \sum_i M_{iB} = 0 : 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} T_{EC} + 0,5 \cdot T - 3 \cdot G = 0 \end{cases}$$

$$T = G$$

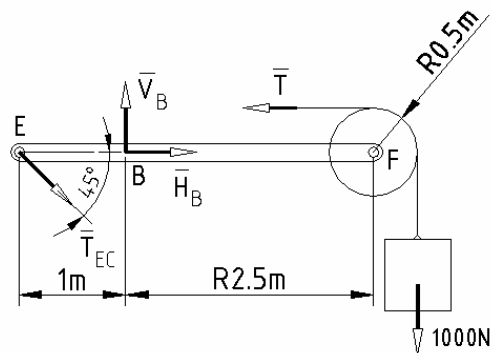


Fig. 5.2.b

Rezultă:  $H_B = -1500 \text{ N}$ ;  $V_B = 3500 \text{ N}$ ;  
 $T_{EC} = 3525 \text{ N}$ .

3. Reacțiunea din axul scripetelui  $F$  se obține aplicând *metoda izolării elementelor*, respectiv prin izolarea scripetelui (fig 5.2.c), introducând în legăturile acestuia cu sistemul, forțele de legătură corespunzătoare; reacțiunea din axul scripetelui cu componentele  $\bar{H}_B$ ,  $\bar{V}_B$  și tensiunea din ramura orizontală a cablului trecut peste scripete și fixat în  $H$ ,  $\bar{T}$ .

Ecuatiile scalare de echilibru sunt:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : -T + H_F = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : V_F - 1000 = 0 \\ \sum_i M_{iF} = 0 : 0,5T - 0,5 \cdot 1000 = 0 \end{cases}$$

Rezultă:  $H_F = V_F = T = 1000 \text{ N}$

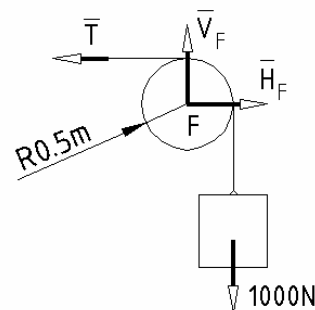


Fig. 5.2.c

2. Un cadru rezemat în capătul  $A$ , articulat în  $C$  și încastrat în capătul  $E$ , are forma și dimensiunile indicate în figura 5.3.a. Asupra cadrului acționează o forță orizontală de  $6 \text{ kN}$  pe mijlocul deschiderii  $AB$  și o forță distribuită uniform de mărime  $2 \text{ kN/m}$ , pe deschiderea  $CD$ . Neglijând greutatea cadrului să se determine reacțiunile din cele trei legături

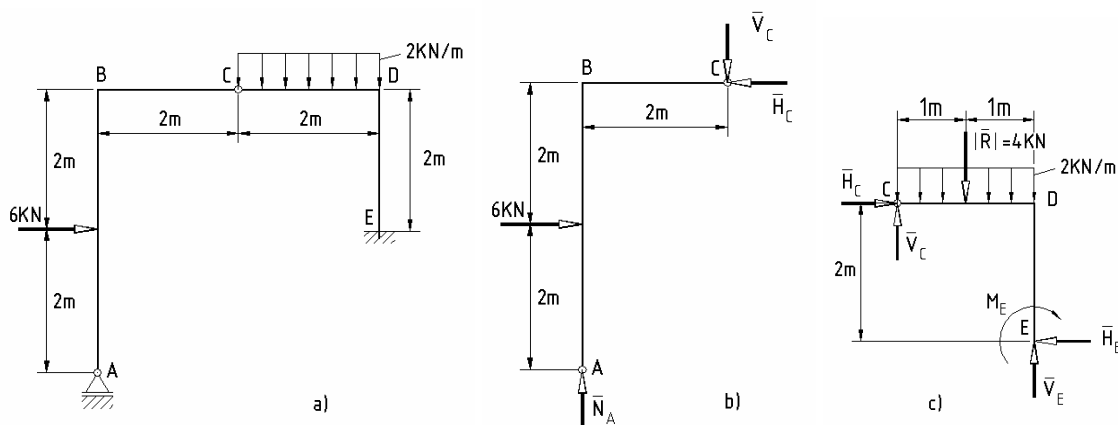


Fig.5.3

*Rezolvare.* Pentru determinarea reacțiunilor din cele trei legături se aplică metoda izolării elementelor, sistemul material fiind constituit din două corpuri: corpul  $ABC$  și corpul  $CDE$ . Pentru fiecare corp izolat se înlătură legăturile înlocuindu-le cu forțele de legătură corespunzătoare. Capătul  $A$  fiind un reazem se substituie cu o reacțiune normală  $\bar{N}_A$ .

Articulația cilindrică din  $C$  se substituie cu cele două componente ale reacțiunii  $\bar{H}_C$  și  $\bar{V}_C$ . Articulația  $C$  fiind o legătură interioară sistemului, forțele de legătură interioară respectând principiul acțiunii și al reacțiunii, sunt egale și de sens contrar pe cele două corpuri adiacente legăturii. Capătul  $E$  este o încăstrare care se înlocuiește cu efectul mecanic corespunzător, forțele și momentul din legătură:  $\bar{H}_E$ ,  $\bar{V}_E$  și  $\bar{M}_E$ .

Corpul  $ABC$  (fig.5.3.b):

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : 6 - H_C = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : N_A - V_C = 0 \\ \sum_i M_{iA} = 0 : -2 \cdot 6 - 2V_C + 4H_C = 0 \end{cases}$$

Corpul  $CDE$  (fig.5.3.c): forța distribuită uniform se înlocuiește cu o forță concentrată egală cu rezultanta acesteia, având mărimea  $R = pl = 2 \cdot 2 = 4 \text{ kN}$  și care acționează la mijlocul lungimii pe care se distribuie.

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 : H_C - H_E = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 : V_C + V_E - 4 = 0 \\ \sum_i M_{iE} = 0 : 2H_C + 2V_C - 1 \cdot 4 + M_E = 0 \end{cases}$$

Rezolvând cele două sisteme de ecuații, se obțin valorile reacțiunilor:

$$N_A = H_C = V_C = H_E = 6 \text{ kN}, V_E = -2 \text{ kN}, M_E = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**3.** Rezultanta presiunii gazelor din cilindru unui motor cu ardere internă este  $P = 250 \text{ N}$ . Pentru poziția indicată în figura 5.4.a să se determine mărimea cuplului motor  $M$ , creat de această forță care acționează asupra arborelui cotit (manivelei)  $OA$ .

*Rezolvare.* Ansamblul motor este constituit din trei corpuri: arborele cotit, acționat de cuplul  $M$ , reprezentat prin manivela  $OA$ , biela  $AB$  și pistonul  $B$ , acționat de forța  $P$ . Legăturile cu exteriorul sunt reprezentate printr-un lagăr (articulația cilindrică  $O$ ) în care se montează arborele cotit și peretele vertical al cilindrului (reazemul) în care se montează pistonul. Legăturile interioare sunt reprezentate de articulațiile cilindrice din  $A$  și  $B$  care leagă biela de arborele cotit, respectiv de piston.

De menționat că pentru biela  $AB$  de greutate neglijabilă și fără sarcini pe deschidere (bară dublu articulată), reacțiunile din capetele  $B$  și  $C$  ale acesteia sunt egale și direct opuse având ca suport direcția bielei. Cuplul motor  $M$  va rezulta din condiția de

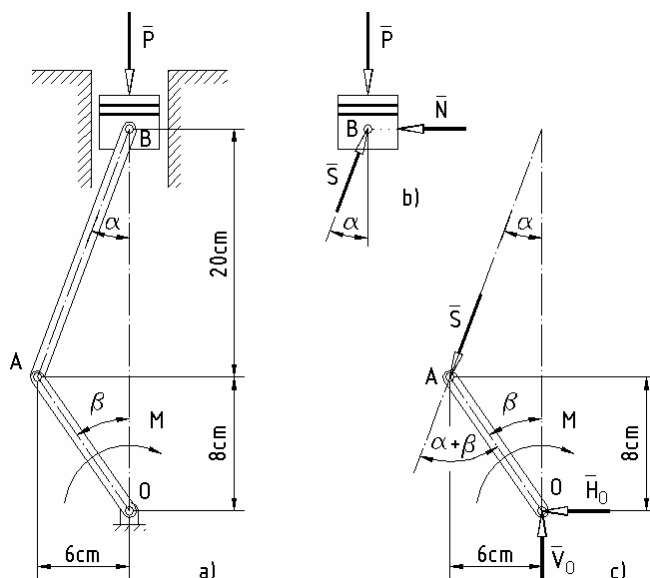


Fig.5.4

echilibru a sistemului. Ecuatiile de echilibru vor fi scrise pentru pistonul  $B$  și manivela  $OA$ . Pentru biela  $AB$  nu sunt necesare aceste ecuații, întrucât tensiunea din aceasta, de sens contrar celei reprezentate pe corpurile adiacente rezultă din ecuațiile de echilibru scrise pentru celelalte două corpuri. Întrucât nu sunt cerute reacțiunile din legăturile cu exteriorul, pentru cele două corpuri vor fi scrise doar ecuațiile:

Pistonul  $B$  (fig.5.4.b):

$$\sum_i F_{iy} = 0 : S \cos \alpha - P = 0$$

Manivela  $OA$  (fig.5.4.c):

$$\sum_i M_{i0} = 0 : S \cdot (OA) \sin(\alpha + \beta) - M = 0$$

Mărimea cuplului motor este:

$$M = \frac{P}{\cos \alpha} \cdot (OA) \sin(\alpha + \beta) = P \cdot (OA) (\operatorname{tg} \alpha \cos \beta + \sin \beta)$$

unde:

$$OA = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{10}; \sin \beta = \frac{6}{10}; \cos \beta = \frac{8}{10}$$

și

$$M = 250 \cdot 10 \left( \frac{3}{10} \frac{8}{10} + \frac{6}{10} \right) = 2500 \frac{84}{100} = 2100 \text{ N} \cdot \text{cm} = 21 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**4.** Corpul  $C$  din figura 5.6.a are greutatea  $G = 400 \text{ N}$  și coeficientul de frecare dintre acesta și planul orizontal  $\mu = 0,4$ . Să se determine forța  $\bar{P}$  aplicată în articulația  $B$  care va cauza mișcarea corpului  $C$  spre dreapta.

*Rezolvare.* Forța  $\bar{P}$  necesară mișcării corpului  $C$  spre dreapta se va determina din condiția de echilibru limită a sistemului (condiția de repaus cu mișcare iminentă a corpului  $C$ ). Întrucât nu interesează reacțiunile din legături și cu metoda solidificării nu poate fi obținut numărul necesar de ecuații pentru determinarea tuturor necunoscutelor, se utilizează metoda izolării elementelor combinată cu metoda echilibrului părților. Astfel se izolează bara  $AB$  (pentru care se scrie doar ecuația de momente în raport cu articulația  $A$ ) și subsistemul constituit din bara  $BC$  și corpul  $C$  (pentru care se scriu toate ecuațiile scalare de echilibru).

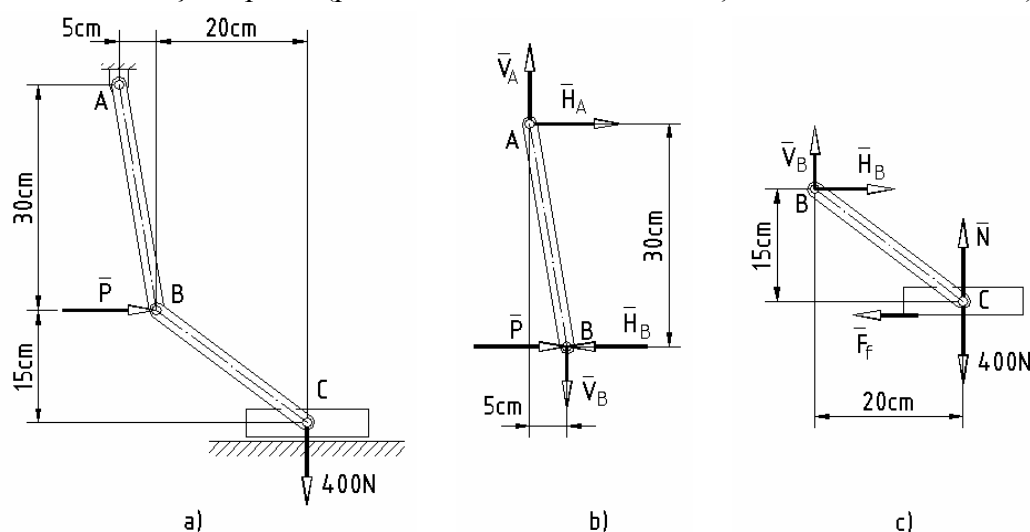


Fig.5.6

Bara  $AB$  (fig.5.6.b):

$$\sum_i M_{iA} = 0: 30P - 30H_B - 5V_B = 0$$

Subsistemul  $BC$  (fig.5.6.c); dimensiunile corpului  $C$  fiind mici, forțele care acționează asupra acestuia sunt concurente în punctul  $C$ , inclusiv forța de frecare  $F_f$ :

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: H_B - F_f = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0: V_B + N - 400 = 0 \\ \sum_i M_{iC} = 0: -20V_B - 15H_B = 0 \\ F_f = 0,4N \end{cases}$$

Rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} H_B - 0,4N = 0 \\ V_B + N - 400 = 0 \\ 4V_B + 3H_B = 0 \\ 6P - 6H_B - V_B = 0 \end{cases}$$

și forța  $P$  având valoarea:

$$P \cong 1200 \text{ N}$$

5. Asupra roții motoare  $O$  acționează un cuplu în sens orar de mărime  $M = 90 \text{ daN} \cdot \text{cm}$ . Pentru oprirea roții se acționează o pârghie cu sabot,  $ABC$  cu ajutorul cilindrului hidraulic  $BD$  (fig.5.7.a). Să se determine forța minimă pe care o exercită cilindrul hidraulic asupra pârghiei frânei, necesară opririi roții, dacă coeficientul de frecare dintre sabot și roată este  $\mu = 0,4$ . Care va fi această forță dacă asupra roții acționează același cuplu motor dar în sens antiorar?

*Rezolvare.* Forța minimă necesară frânării se determină din condiția de echilibru limită a sistemului, respectiv din ecuațiile de echilibru ale elementelor izolate din sistem (fig.5.7.b, fig.5.7.c).

Pentru eliminarea din calcule a reacțiunilor din articulațiile  $O$  și  $A$ , din ecuațiile scalare de echilibru reținem ecuațiile de momente în raport cu cele două puncte, scrise pentru fiecare element.

a. Cuplul motor are sensul orar:

$$\begin{cases} \sum_i M_{iO} = 0: -M_I + 25F_{fl} = 0 \\ \sum_i M_{iA} = 0: 15F - 45N + 15F_{fl} = 0 \\ F_{fl} = \mu N \end{cases}$$

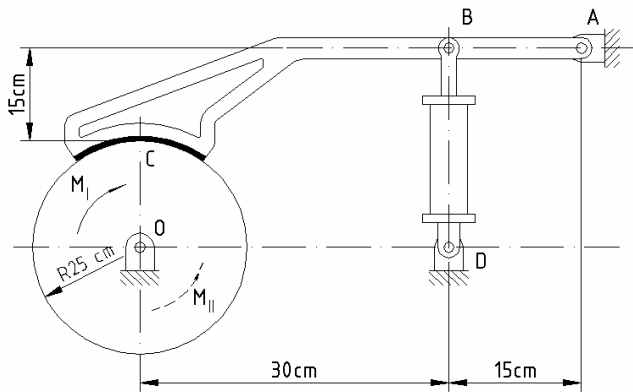


Fig.5.7.a

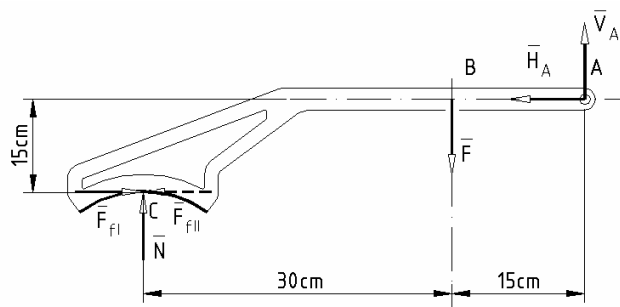


Fig. 5.7.b

Rezultă:  $F = 23,4 \text{ daN}$

b. Cuplul motor are sensul antiorar:

$$\begin{cases} \sum_i M_{iO} = 0: M_{II} - 25F_{fII} = 0 \\ \sum_i M_{iA} = 0: 15F - 45N - 15F_{fII} = 0 \\ F_{fII} = \mu N \end{cases}$$

Rezultă:  $F = 30,6 \text{ daN}$

*Observație.* O astfel de frână pentru care forța de frânare depinde de sensul cuplului motor se numește frână ireversibilă. Pentru ca frâna să devină reversibilă este necesar ca momentul forței de frecare, al cărui sens depinde de sensul cuplului motor, să fie nul. Aceasta se realizează prin reducerea brațului acestei forțe la zero, în raport cu articulația  $A$  a pârghiei.

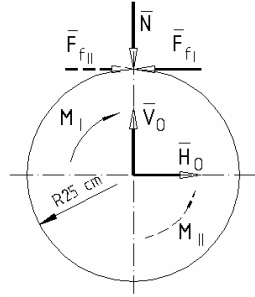


Fig. 5.7.c

6. O frână cu bandă acționează asupra unei roți de rază  $R$ , banda de frânare fiind acționată de pârghia  $CAB_1B_2$  ca în figura 5.8.a. Cunoscând cuplul motor  $M$  care acționează asupra roții, dimensiunile  $a$  și  $b$  ale pârghiei și coeficientul de frecare  $\mu$ , dintre banda de frânare și roată să se determine forța  $F$ , necesară frânării.

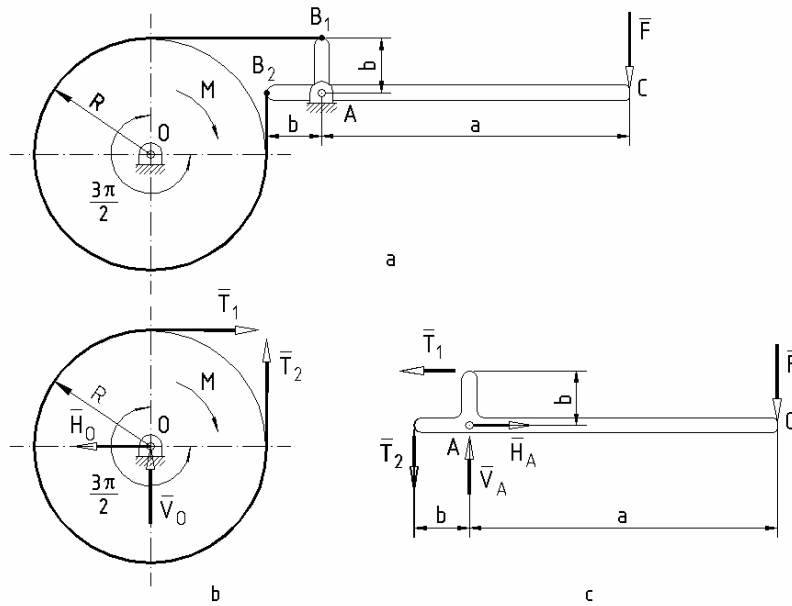


Fig. 5.8

*Rezolvare.* Se izolează cele două corpuri din sistem prin secționarea benzii de frânare (fig.5.8.b, fig.5.8.c). Cu ajutorul ecuațiilor de echilibru scrise pentru cele două corpuri – numai ecuațiile de momente în raport cu articulațiile  $O$  și  $A$ , care elimină din calcule reacțiunile acestora, împreună cu formula lui Euler pentru frecarea firelor, obținem:

$$\begin{cases} \sum_i M_{iO} = 0; T_2 R - T_1 R - M = 0 \\ \sum_i M_{iA} = 0; T_2 b + T_1 b - F a = 0 \\ T_2 = T_1 e^{\frac{3\pi}{2}\mu} \end{cases}$$

și

$$F = \frac{b}{a} \cdot \frac{e^{\frac{3\pi}{2}\mu} + 1}{e^{\frac{3\pi}{2}\mu} - 1} \cdot \frac{M}{R}$$

### TEST DE EVALUARE

- Sistemul material este:
  - un sistem de puncte materiale
  - un sistem de corpuri rigide
  - un sistem de puncte materiale sau corpuri rigide aflate în interacțiune mecanică
- Valoarea torsorului forțelor interioare pentru un sistem material este:
  - zero
  - numai rezultanta forțelor interioare este nulă
  - nici una din variantele  $a$  sau  $b$  nu este corectă
- Metodele utilizate în studiul echilibrului sistemelor materiale sunt:
  - metoda izolării elementelor și metoda solidificării
  - metoda izolării elementelor și metoda echilibrului părților
  - metoda izolării elementelor, metoda solidificării și metoda echilibrului părților
- Metoda solidificării constă în:
  - solidificarea legăturilor interioare sistemului
  - eliberarea sistemului de legăturile cu exteriorul
  - solidificarea legăturilor interioare, eliberarea sistemului de legăturile exterioare și scrierea ecuațiilor de echilibru ale sistemului, considerat rigid
- În ecuația de echilibru a unui element din sistem, termenul  $\sum_j \bar{F}_{ij}$  reprezintă:
  - rezultanta forțelor interioare care acționează asupra sistemului material
  - rezultanta forțelor interioare care acționează asupra unui element din sistemul material
  - nici una din variantele  $a$  și  $b$
- Pentru un sistem material, ecuația  $\sum_i \sum_j \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} = 0$  reprezintă:
  - condiția de echilibru a unui element din sistem
  - momentul într-un punct al forțelor interioare sistemului
  - ambele variante  $a$  și  $b$
- Termenii din ecuațiile de echilibru ale unui sistem material  $\tau_o \begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_o = 0 \end{cases}$  reprezintă:
  - torsorul forțelor interioare sistemului
  - torsorul forțelor exterioare sistemului
  - variantele  $a$  și  $b$  împreună
- Sistemul static nedeterminat este:
  - sistemul cu ordin de nedeterminare mai mare decât  $l$
  - sistemul în care numărul necunoscutelor este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru static
  - sistemul în care numărul necunoscutelor este mai mic decât numărul ecuațiilor de echilibru static



# CINEMATICA

## 6. CINEMATICA PUNCTULUI

Cinematica punctului studiază mișcările mecanice ale corpurilor, fără a lua în considerare masa acestora și forțele care acționează asupra lor. Cinematica face un studiu geometric al mișcărilor din care cauză această parte a mecanicii se mai numește și *geometria mișcărilor*. Cinematica folosește noțiunile fundamentale de spațiu și timp. Spațiul se consideră absolut, euclidian și tridimensional, iar timpul un parametru scalar independent de spațiu și continuu crescător. Noțiunea de mișcare este relativă. Mișcarea se raportează în general la un reper sau sistem de referință. Dacă reperul este fix, mișcarea se numește *absolută*, iar dacă reperul este mobil, mișcarea se numește *relativă*.

### 6.1. NOȚIUNI FUNDAMENTALE

#### 6.1.1. LEGEA DE MIȘCARE

Mișcarea unui punct  $M$  este cunoscută dacă, în orice moment  $t$ , se poate preciza poziția acestuia în raport cu un reper presupus fix, definită de vectorul de poziție  $\vec{r}$  ca funcție de timp (fig.6.1).

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (6.1)$$

Pentru a defini mișcarea reală, funcția vectorială descrisă de ecuația (6.1), trebuie să fie *continuuă, uniformă, finită în modul și de două ori derivabilă*. Ea constituie *legea de mișcare*.

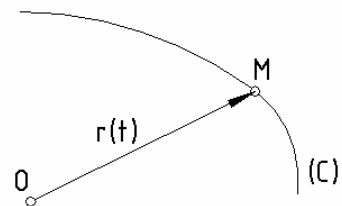


Fig.6.1

#### 6.1.2. TRAIECTORIA

*Traectoria* este locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de punct în mișcare. Referitor la traiectorie, se întâlnesc două cazuri:

*Cazul 1.* Se cunoaște poziția punctului, dată prin funcțiile scalare, care definesc vectorul variabil  $\vec{r}(t)$  (fig.6.2) și se cere să se determine traiectoria.

Dacă funcția vectorială  $\vec{r}(t)$  este definită cartezian se poate scrie:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (6.2)$$

unde  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  sunt versorii axelor  $Ox, Oy$  și  $Oz$ , ale sistemului cartezian.

Proiecțiile pe axe ale vectorului  $\bar{r}(t)$  reprezintă coordonatele punctului  $M$  în sistemul cartezian  $Oxyz$ , sunt funcții scalare de timp și se numesc *ecuații parametrice ale traiectoriei*, parametrul fiind timpul  $t$ .

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \quad (6.3)$$

Prin eliminarea parametrului  $t$  în ecuațiile parametrice (6.3) se obține traiectoria, ca intersecție a două plane:

$$f_1(x, y, z) = 0; \quad f_2(x, y, z) = 0 \quad (6.4)$$

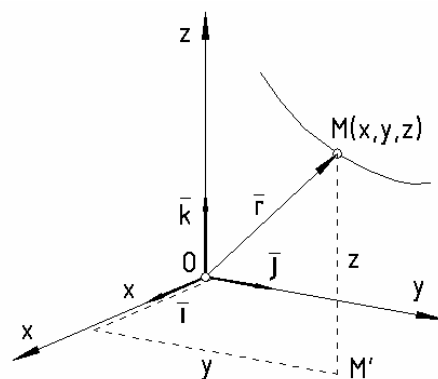


Fig. 6.2

*Cazul 2.* Se cunoaște traiectoria punctului, curba  $(C)$ , și se cere să se determine poziția acestuia. Dacă traiectoria este o curbă *continuă, rectificabilă și are în orice punct o tangentă unică*, poziția punctului se poate determina utilizând un singur parametru scalar, care este coordonata curbilinie  $s$  (fig.6.3).

Punctul  $M$  se deplasează pe curba  $(C)$  în sensul indicat de săgeată. Pentru a indica poziția la un moment dat a punctului se alege ca reper punctul  $M_0$ , care constituie originea arcelor, sensul de parcurs fiind indicat de săgeată.

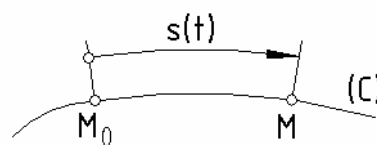


Fig. 6.3

Poziția punctului  $M$  pe curbă, în timp este determinată de *ecuația orară a mișcării* sau *legea orară a mișcării*:

$$s = s(t) \quad (6.5)$$

### 6.1.3. VITEZA

*Viteza este o mărime vectorială atașată punctului care precizează direcția și sensul în care se efectuează mișcarea.*

Se consideră două poziții succesive  $M_1$  și  $M_2$  ale punctului  $M$  în mișcarea pe curba  $(C)$ , la momentele  $t$  și respectiv  $t + \Delta t$ , caracterizate prin vectorii de poziție  $\bar{r}(t)$ , respectiv  $\bar{r}(t + \Delta t)$  (fig.6.4). Intervalul de timp  $\Delta t$  fiind foarte mic, se poate asimila elementul de arc  $M_1M_2$ , cu elementul de coardă  $M_1M_2$ , care reprezintă modulul vectorului  $\overline{M_1M_2} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t) = \Delta \bar{r}$

Raportul  $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$  se numește *viteză medie* a punctului  $M$ . Cum de regulă interesează direcția și sensul mișcării în orice moment pe curba  $(C)$ , se calculează viteza instantanee. Aceasta se realizează când intervalul de timp  $\Delta t \rightarrow 0$  sau  $M_2 \rightarrow M_1$ .

Trecând la limită, rezultă *viteza instantanee* într-un punct:

$$\bar{v} = \lim_{M_2 \rightarrow M_1} \frac{\overline{M_1 M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} \quad (6.6)$$

Relația (6.6), arată că viteza unui punct este egală cu derivata vectorului de poziție al punctului, în raport cu timpul (derivata în raport cu timpul a funcțiilor scalare sau vectoriale se va nota, în general, cu un punct, deasupra).

Viteza este tangentă la traiectorie în punctul respectiv:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{|\bar{r}|} \cdot \frac{|\bar{r}|}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \bar{\tau} \quad (6.7)$$

unde:

$$\frac{d\bar{r}}{|\bar{r}|} = \bar{\tau}; \quad \frac{|\bar{r}|}{ds} = 1; \quad \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (6.8)$$

$\bar{\tau}$  este versorul tangentei.

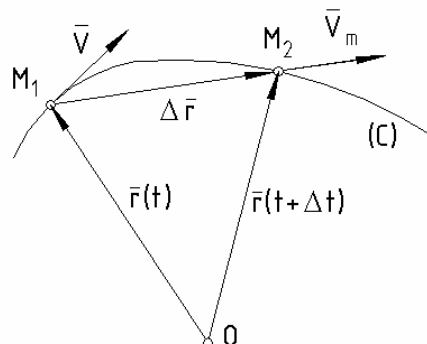


Fig. 6.4

#### 6.1.4. ACCELERAȚIA

*Accelerația este o mărime vectorială atașată punctului în mișcare și arată modul de variație al vitezei acestui punct în decursul mișcării, ca modul, direcție și sens.*

Se consideră două poziții succesive  $M_1$  și  $M_2$  ale punctului  $M$  în mișcare pe curba  $(C)$ , la momentele  $t$  și respectiv  $t + \Delta t$ , având vitezele  $\bar{v}(t) = \bar{v}$  și  $\bar{v}(t + \Delta t) = \bar{v} + \Delta \bar{v}$  (fig.6.5). Variația vitezei în intervalul de timp  $\Delta t$  este:  
 $\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t) = (\bar{v} + \Delta \bar{v}) - \bar{v} = \Delta \bar{v}$

Raportul  $\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$  măsoară variația vitezei în timp și se numește *acelerație medie*. Prin trecerea la limită, aceasta realizându-se când intervalul de timp  $\Delta t \rightarrow 0$  sau  $M_2 \rightarrow M_1$ , rezultă *acelerația instantanee*:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} \quad (6.9)$$

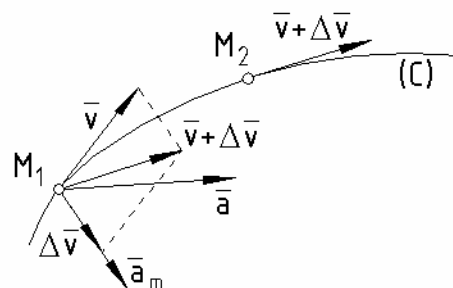


Fig. 6.5

Dacă se continuă derivarea în raport cu timpul, a vectorului de poziție  $\bar{r}$ , se obțin vectori care se numesc *acelerații de ordin superior*. Astfel, derivata a

treia în raport cu timpul a vectorului de poziție, se numește accelerație de ordinul al doilea sau *supraaccelerație*.

### 6.1.5. VITEZA ȘI ACCELERAȚIA UNGHIULARĂ

Sunt cazuri când poziția unui punct pe traiectorie se poate preciza cu ajutorul unui unghi la centru  $\theta$ , ca în cazul mișcării circulare. Considerând ca reper, diametrul orizontal, legea de mișcare a punctului  $M$  pe cerc este definită de funcția:

$$\theta = \theta(t) \quad (6.10)$$

Se consideră două poziții succesive  $M_1$  și  $M_2$  ale punctului  $M$  în mișcarea pe cerc, la momentele  $t$  și respectiv  $t + \Delta t$ , având unghiurile la centru  $\theta(t) = \theta$  și  $\theta(t + \Delta t) = \theta + \Delta\theta$  (fig.6.6). Variația unghiulară în intervalul de timp  $\Delta t$  este:  
 $\theta(t + \Delta t) - \theta(t) = (\theta + \Delta\theta) - \theta = \Delta\theta$

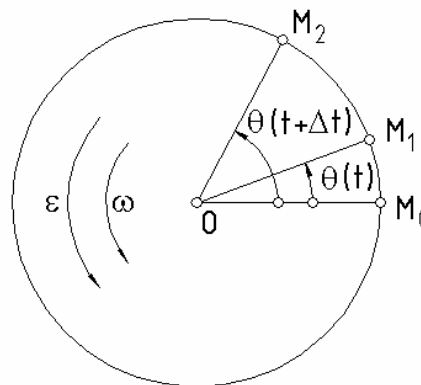


Fig. 6.6

Raportul  $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$  se numește *viteză*

*unghiulară medie* a punctului  $M$ . Prin trecerea la limită, aceasta realizându-se când intervalul de timp  $\Delta t \rightarrow 0$  sau  $M_2 \rightarrow M_1$ , rezultă *viteza unghiulară instantanee*:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (6.11)$$

Considerând pozițiile succesive  $M_1$  și  $M_2$  ale punctului  $M$  în mișcare pe cerc, la momentele  $t$  și respectiv  $t + \Delta t$ , având vitezele unghiulare  $\omega(t) = \omega$  și  $\omega(t + \Delta t) = \omega + \Delta\omega$ , variația vitezei unghiulare în intervalul de timp  $\Delta t$  este:  
 $\omega(t + \Delta t) - \omega(t) = (\omega + \Delta\omega) - \omega = \Delta\omega$

Raportul  $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$  măsoară variația vitezei unghiulare în timp și se numește

*accelerație unghiulară medie*. Prin trecerea la limită când intervalul de timp  $\Delta t \rightarrow 0$  sau  $M_2 \rightarrow M_1$ , rezultă *accelerația unghiulară instantanee*:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (6.12)$$

Prin convenție, viteza unghiulară poate fi considerată un vector al cărui suport este o dreaptă perpendiculară pe planul traiectoriei, care trece prin punctul  $O$ . Sensul pozitiv al vectorului viteză unghiulară este dat de regula șurubului, care se rotește în sensul de deplasare al punctului  $M$ . În mod similar se definește și vectorul accelerație unghiulară.

## 6.2. STUDIUL MIȘCĂRII PUNCTULUI

### 6.2.1. STUDIUL MIȘCĂRII ÎN COORDONATE CARTEZIENE

A cunoaște mișcarea punctului, înseamnă a cunoaște în orice moment vectorul de poziție  $\vec{r}$ , viteza  $\vec{v}$  și accelerația acestuia  $\vec{a}$  (fig.6.7).

Vectorul de poziție are expresia:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (6.13)$$

Ecuatiile parametrice ale traiectoriei sunt:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \quad (6.14)$$

Traectoria sau curba (C) se obține prin eliminarea parametrului  $t$ , în ecuațiile parametrice ale mișcării.

Viteza se obține ca derivata vectorului de poziție în raport cu timpul:

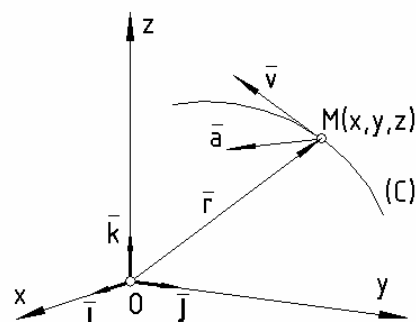


Fig. 6.7

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (6.15)$$

Componentele vitezei sunt:

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z} \quad (6.16)$$

Modulul vitezei este:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (6.17)$$

Direcțiile pe care le formează suportul vectorului viteză cu axele sistemului cartezian Oxyz sunt date de cosinuşii directori:

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{\dot{x}}{|\vec{v}|}; \quad \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{\dot{y}}{|\vec{v}|}; \quad \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{\dot{z}}{|\vec{v}|} \quad (6.18)$$

Accelerația se obține ca derivata în raport cu timpul a vitezei punctului sau derivata de două ori în raport cu timpul, a vectorului de poziție:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k}; \quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad (6.19)$$

Componentele accelerației sunt:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \quad (6.20)$$

Modulul accelerației este:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (6.21)$$

Direcțiile pe care le formează suportul vectorului accelerație cu axele sistemului cartezian  $Oxyz$  sunt date de cosinuzii directori:

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{\dot{v}_x}{|\bar{a}|} = \frac{\ddot{x}}{|\bar{a}|}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{\dot{v}_y}{|\bar{a}|} = \frac{\ddot{y}}{|\bar{a}|}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{\dot{v}_z}{|\bar{a}|} = \frac{\ddot{z}}{|\bar{a}|} \quad (6.22)$$

*Caz particular.* Dacă  $z = 0$ , traiectoria este o curbă plană situată în planul  $Oxy$  (fig.6.8).

Viteza în acest caz are expresia:

$$\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}; \quad v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y} \quad (6.23)$$

Modulul vitezei este:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (6.24)$$

Suportul vitezei este definit de unghiul  $\alpha$ , pe care-l formează vectorul viteză, cu axa  $Ox$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad (6.25)$$

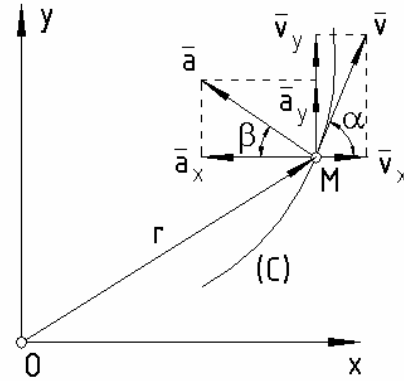


Fig. 6.8

Accelerația este:

$$\bar{a} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j}; \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad (6.26)$$

Modulul accelerației este:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \quad (6.27)$$

Suportul accelerației definit de unghiul  $\beta$ , pe care-l formează vectorul accelerație cu axa  $Ox$  se determină cu relația:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{\dot{v}_y}{\dot{v}_x} = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} \quad (6.28)$$

### 6.2.2. STUDIUL MIȘCĂRII ÎN COORDONATE NATURALE

*Sistemul de coordonate natural* numit și *intrinsec* sau *triedrul Frenet* este un sistem de referință mobil (fig.6.9), cu originea în punctul  $M$ , care efectuează mișcarea și având ca axe:

- tangenta, cu versorul  $\bar{\tau}$ , pozitiv în sensul creșterii parametrului scalar  $s$ , măsurat de la originea arcelor,  $M_0$ ;
- normala principală, cu versorul  $\bar{\nu}$  pozitiv înspre centrul de curbură;
- binormala, cu versorul  $\bar{\beta}$  definit astfel încât versorii  $\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$  să formeze un sistem triortogonal drept ( $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$ ).

Planele determinate de cei trei vectori se numesc: *osculator*, *rectifiant* și *normal*.

Pentru determinarea componentelor vitezei și ale accelerației în triedrul Frenet, se va utiliza relația de definiție a tangentei la o curbă:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} \quad (6.29)$$

și formula Frenet:

$$\frac{1}{\rho} \bar{v} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \quad (6.30)$$

în care  $\rho$  este raza de curbură în punctul  $M$ .

Sistemul natural se utilizează când se cunoaște *ecuația orară a mișcării* (6.5),  $s = s(t)$ .

Vectorul de poziție  $\bar{r}$  se poate exprima în funcție de elementul de arc,  $s$ :

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = \bar{r}[s(t)] \quad (6.31)$$

Viteza se obține derivând vectorul de poziție în raport cu timpul și ținând seama de relația (6.29):

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \bar{\tau} \dot{s} \quad (6.32)$$

Componentele vitezei pe axele triedrului Frenet sunt:

$$v_t = \dot{s}; \quad v_n = 0; \quad v_b = 0 \quad (6.33)$$

Rezultă că viteza este dirijată după direcția tangentei și are modulul:

$$|\bar{v}| = v_t = \dot{s} \quad (6.34)$$

Accelerația se obține derivând viteza în raport cu timpul și ținând seama de relația (6.30):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s} \bar{\tau}) = \frac{d\dot{s}}{dt} \bar{\tau} + \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{v} \quad (6.35)$$

Componentele accelerației pe axele triedrului Frenet sunt:

$$a_t = \ddot{s} = \dot{v}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}; \quad a_b = 0 \quad (6.36)$$

Modulul accelerației este:

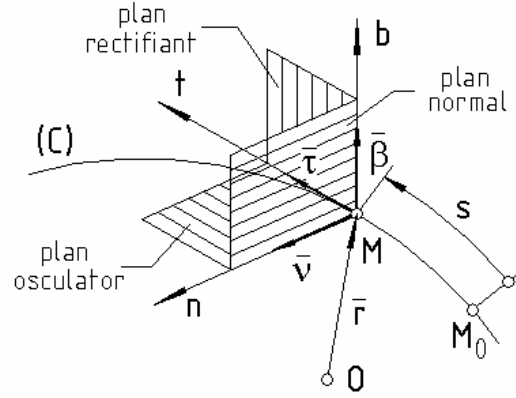


Fig. 6.9

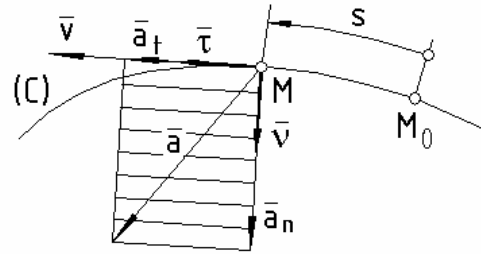


Fig. 8.10

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}} = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} \quad (6.37)$$

Accelerația are componenta pe binormală, nulă, în tot timpul mișcării, vectorul accelerație fiind situat în planul osculator (fig.6.10).

*Observații:*

1. Dacă  $v = ct.$ ,  $a_t = 0$ , mișcarea este uniformă;
2. Accelerația este zero dacă ambele componente ale acesteia sunt nule:

$$\begin{cases} a_t = 0 \Leftrightarrow \dot{v} = 0 \Rightarrow v = ct. - \text{mișcare uniformă} \\ a_n = 0 \Leftrightarrow v^2 \frac{1}{\rho} = 0; v \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} = 0 \Rightarrow \rho \rightarrow \infty - \text{mișcare rectilie} \end{cases}$$

*Singura mișcare în care accelerația este nulă este mișcarea rectilie și uniformă.*

3. Componenta tangențială a accelerației  $a_t$  exprimă variația vitezei în modul, iar componenta normală  $a_n$ , variația vitezei în direcție.
4. Dacă  $\vec{v} \cdot \vec{a}_t > 0$ , mișcarea este accelerată, dacă  $\vec{v} \cdot \vec{a}_t < 0$ , mișcarea este încetinită (decelerată).

**Aplicații. 1.** Se dă mecanismul bielă-manivelă din figura 6.11, unde  $OA = AB = l$ . Manivela  $OA$  se rotește cu viteză unghiulară constantă,  $\omega = ct.$ . Să se determine traiectoria, viteza și accelerația punctului  $C$  de pe bielă, dacă  $AC = d$ .

*Rezolvare.* Se alege sistemul cartezian  $Oxy$ , cu originea în axul  $O$  al manivelei  $OA$  și axa orizontală  $Ox$  ca fiind ghidajul pe care se deplasează culisa  $B$ . Poziția curentă a punctului  $C$  va fi exprimată în funcție de legea de mișcare a manivelei,  $\theta(t)$ :

$$\theta(t) = \omega t$$

Legea de mișcare a punctului  $C$  este exprimată prin vectorul de poziție al acestuia ca funcție de timp.

$$\begin{aligned} \overline{OC} = \vec{r}(t) &= (l+d)\cos\theta \cdot \vec{i} + (l-d)\sin\theta \cdot \vec{j} = \\ &= (l+d)\cos\omega t \cdot \vec{i} + (l-d)\sin\omega t \cdot \vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j} \end{aligned}$$

Coordonatele punctului  $C$ , exprimate ca funcții de timp cu ajutorul parametrului  $\theta(t)$ , reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$\begin{cases} x = OC' = OA' + A'C' = l\cos\theta + d\cos\theta = (l+d)\cos\theta = (l+d)\cos\omega t \\ y = OC'' = AA' - AA'' = l\sin\theta - d\sin\theta = (l-d)\sin\theta = (l-d)\sin\omega t \end{cases}$$

sau:

$$\frac{x}{l+d} = \cos\omega t; \quad \frac{y}{l-d} = \sin\omega t$$

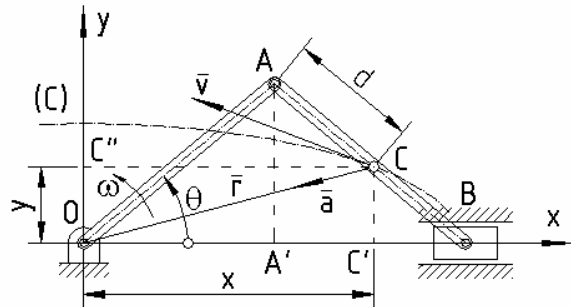


Fig. 6.11



Prin eliminarea parametrului  $t$ , aflat implicit în legea de mișcare  $\theta(t)$  va rezulta ecuația traiectoriei, (ecuațiile parametrice se ridică la pătrat și se însumează):

$$\frac{x^2}{(l+d)^2} + \frac{y^2}{(l-d)^2} = 1$$

care este o elipsă de semiaxe  $(l+d)$  și  $(l-d)$ .

Viteza are componentele:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -(l+d)\omega \sin \omega t \\ v_y = \dot{y} = (l-d)\omega \cos \omega t \end{cases}$$

Vectorul viteză poate fi scris sub forma:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = \omega [-(l+d) \sin \omega t \cdot \vec{i} + (l-d) \cos \omega t \cdot \vec{j}]$$

fiind tangent la traiectorie în punctul  $C$ .

Accelerația are componentele:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -(l+d)\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -(l-d)\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y$$

Vectorul accelerație poate fi scris sub forma:

$$\vec{a} = -\omega^2 (l+d) \cos \omega t \vec{i} - \omega^2 (l-d) \sin \omega t \vec{j} = -\omega^2 (x \vec{i} + y \vec{j}) = -\omega^2 \vec{r}$$

este coliniar și de sens contrar vectorului de poziție  $\vec{r}$ .

**2.** Culisa  $A$  se deplasează pe un ghidaj orizontal, plecând din  $O$  cu viteză constantă  $v_0$ . Un fir, de lungime  $l$ , care trece prin inelul culisei  $A$ , este legat cu un capăt în  $O$ , celălalt capăt fiind legat de inelul culisei  $B$ , care se deplasează pe un ghidaj vertical (fig.6.12). Cunoscând distanța  $OC = a$ , să se determine legea de mișcare și viteza culisei  $B$ .

*Rezolvare.* Se alege sistemul de axe  $Oxy$ , cu originea în punctul de fixare al ghidajului, orizontal, axa orizontală  $Ox$  fiind ghidajul pe care se deplasează culisa  $A$ . Legea de mișcare a culisei  $B$ ,  $y_B = y(t)$  poate fi exprimată în funcție de legea de mișcare a culisei  $A$ :

$$x_A = x(t) = v_0 t$$

Din  $\triangle ABC$  poate fi scrisă relația:

$$CB = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

$$\text{unde: } \begin{cases} CB = y_B = y(t) \\ AB = l - x_A = l - v_0 t \\ AC = a - x_A = a - v_0 t \end{cases}$$

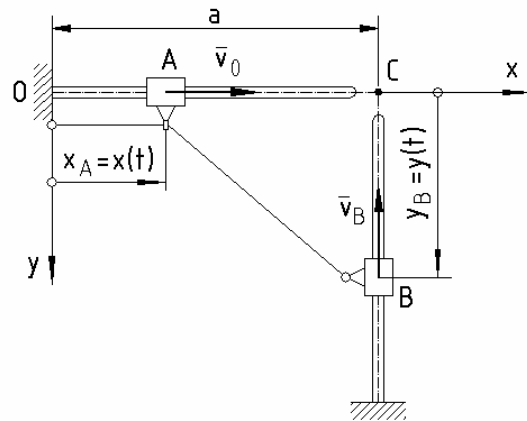


Fig. 6.12

$$y_B = \sqrt{(l - v_0 t)^2 - (a - v_0 t)^2} = \sqrt{l^2 - a^2 - 2v_0 t(l - a)} = \sqrt{(l - a)(l + a - 2v_0 t)}$$

$$v_B = \dot{y}_B = -\frac{2v_0(l - a)}{2\sqrt{(l - a)(l + a - 2v_0 t)}} = -\sqrt{\frac{l - a}{l + a - 2v_0 t}} \cdot v_0$$

3. Manivela  $OA$  de lungime  $2R$  se rotește cu viteză unghiulară  $\omega$ , în jurul capătului  $O$ . Capătul  $A$  este articulat la periferia unei roți de rază  $R$ , care poate aluneca între două ghidaje paralele ca în figura 6.13. Să se determine legea de mișcare și viteza centrului  $C$ , al roții.

*Rezolvare.* Se alege sistemul de axe  $Oxy$ , cu originea în axul  $O$  al manivelei  $OA$  și axa orizontală  $Ox$ , suprafața orizontală a ghidajului. Întrucât centrul  $C$  al roții se deplasează după o direcție paralelă cu axa  $Ox$ , legea de mișcare a acestuia este definită de abscisa  $x_C = x(t)$ , exprimată în funcție de legea de mișcare a manivelei  $OA$ ,  $\varphi = \omega t$ .

$$x_C = OI = OA' + A'I$$

$$\text{unde: } \begin{cases} OA' = 2R \cos \varphi = 2R \cos \omega t \\ A'I = C'C = \sqrt{AC^2 - AC'^2} \\ AC' = AA' - C'A' = 2R \sin \varphi - R = \\ \quad = R(2 \sin \varphi - 1) = R(2 \sin \omega t - 1) \\ A'I = R \sqrt{1 - (2 \sin \omega t - 1)^2} = \\ \quad = R \sqrt{1 - (4 \sin^2 \omega t - 4 \sin \omega t + 1)} = \\ \quad = 2R \sqrt{\sin \omega t (1 - \sin \omega t)} \end{cases}$$

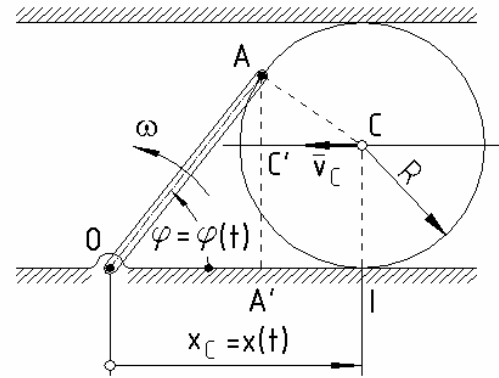


Fig. 6.13

$$x_C = x(t) = 2R(\cos \omega t + \sqrt{\sin \omega t (1 - \sin \omega t)})$$

$$v_C = \dot{x}_C = -2R\omega(\sin \omega t + \frac{\cos \omega t (1 + 2 \sin \omega t)}{2\sqrt{\sin \omega t (1 - \sin \omega t)}})$$

4. Bara  $OA$  se rotește în jurul punctului fix  $O$  cu viteză unghiulară  $\omega$ . De extremitatea  $A$  a barei este legat un fir trecut peste un scripete mic  $B$  care poartă la extremitatea liberă corpul  $M$  (fig.6.14). Să se determine viteza corpului  $M$  și să se arate că expresia acesteia este:  $v = \omega h \sin \alpha$ , unde  $h = OB$  și  $\alpha = \hat{B}$ .

*Rezolvare.* Legea de mișcare a punctului  $M$  este definită de ordonata acestuia ca funcție de timp,  $y_M = y(t)$  iar viteza acestuia se obține derivând în raport cu timpul, legea de mișcare  $v_M = \dot{y}_M$

Singurul parametru căruia i se cunoaște variația în timp fiind unghiul format de manivela  $OA$  cu axa de referință verticală  $Oy$ ,  $\theta = \omega \cdot t$  se va exprima legea de mișcare a punctului în funcție de acest unghi.

Considerând firul  $ABM$ , inextensibil de lungime constantă  $l$  se poate scrie:

$$y_M = (OB) - (MB) = h - [l - (AB)] = h - l + (AB)$$

Porțiunea  $AB$  conform teoremei Pitagora generalizată scrisă în  $\triangle OAB$ , considerând  $OA = r$  este:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\cos \theta} = \\ &= \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos \omega t} \end{aligned}$$

$$y_M = h - l + \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos \omega t}$$

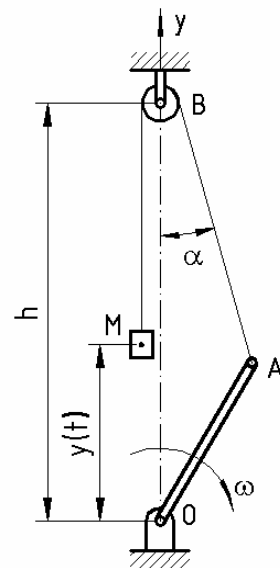


Fig. 6.14

Viteza corpului  $M$  devine:

$$v_M = \dot{y}_M = \omega h \frac{r \sin \omega t}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos \omega t}}$$

Aplicând teorema sinusului, în  $\triangle OAB$  rezultă:

$$\frac{\sin \theta}{AB} = \frac{\sin \alpha}{OA} \Rightarrow \frac{\sin \omega t}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos \omega t}} = \frac{\sin \alpha}{r} \Rightarrow \frac{r \sin \omega t}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos \omega t}} = \sin \alpha$$

Din ultimele două relații se obține:

$$v_M = \omega h \sin \alpha$$

## 6.3. MIȘCĂRI PARTICULARE ALE PUNCTULUI

### 6.3.1. MIȘCAREA RECTILINIE

Traectoria mișcării rectilinii este o dreaptă. Considerând ca traectorie a mișcării, axa  $Ox$ , studiul acesteia se simplifică (fig.6.15). Notând cu  $O$ , reperul pe axa  $Ox$ , poziția punctului la un moment dat este:

$$OM = x = x(t) \quad (6.38)$$

care este o ecuație de tipul *ecuației orare a mișcării*. (6.5).

Rezultă că se va studia mișcarea folosind rezultatele obținute cu ajutorul *triedrului Frenet* însă în cazul particular când traectoria este o dreaptă.

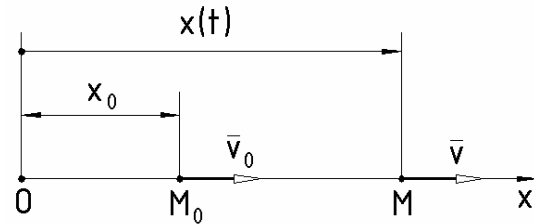


Fig. 6.15

Pentru studiul mișcării sunt necesare și condițiile inițiale (condițiile la momentul inițial  $t_0$ ): spațiul inițial -  $x(t_0) = x_0$ , și viteza inițială -  $v(t_0) = v_0$ .

#### 6.3.1.1. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ

Specific acestei mișcări este viteza constantă cu care se deplasează punctul, deci accelerația nulă -  $a = 0$ .

Caracteristicile mișcării rectilinii uniforme sunt:

$$a = \frac{dv}{dt} = 0; \quad dv = 0; \quad v = c_1 \quad (6.39)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = c_1; \quad dx = c_1 dt; \quad x = \int c_1 dt = c_1 t + c_2 \quad (6.40)$$

Deci:

$$a = 0; \quad v = c_1; \quad x = c_1 t + c_2 \quad (6.41)$$

Condițiile inițiale ale mișcării sunt:

$$t_0 = 0: \quad v(0) = v_0, \quad x(0) = x_0 \quad (6.42)$$

Introducând condițiile inițiale (6.42) în ecuațiile de mișcare (6.41) pentru timpul  $t_0 = 0$ , se obțin constantele de integrare  $c_1$  și  $c_2$ :

$$c_1 = v_0, \quad c_2 = x_0 \quad (6.43)$$

Caracteristicile mișcării rectilinii uniforme devin:

$$a = 0; \quad v = v_0; \quad x = v_0 t + x_0 \quad (6.44)$$

Graficele acestor caracteristici sunt redată în figura 6.16.

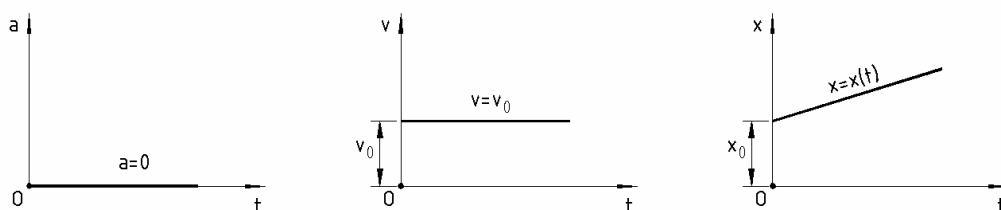


Fig. 6.16

### 6.3.1.2. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORM VARIATĂ

Mișcarea rectilinie uniform variată se definește ca fiind mișcarea unui punct pe o dreaptă cu accelerație constantă  $a = ct$ .

Caracteristicile mișcării rectilinii uniform variate sunt:

$$a = \frac{dv}{dt} = a_0 = ct.; \quad dv = a dt; \quad v = \int a dt = at + c_1 \quad (6.45)$$

$$v = \frac{dx}{dt}; \quad dx = v dt; \quad x = \int (at + c_1) dt = a \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \quad (6.46)$$

Deci:

$$a = a_0 = ct.; \quad v = at + c_1; \quad x = a \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \quad (6.47)$$

Condițiile inițiale ale mișcării fiind:

$$t_0 = 0 : \quad v(0) = v_0, \quad x(0) = x_0 \quad (6.48)$$

care introduse în ecuațiile de mișcare (6.47) pentru timpul  $t_0 = 0$ , conduc la obținerea constantelor de integrare  $c_1$  și  $c_2$ :

$$c_1 = v_0, \quad c_2 = x_0 \quad (6.49)$$

Caracteristicile mișcării rectilinii uniform variate devin:

$$a = a_0 = ct.; \quad v = at + v_0; \quad x = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \quad (6.50)$$

După cum sensurile accelerației și vitezei sunt aceleași sau contrare, mișcarea uniform variată poate fi :

- mișcare uniform accelerată, dacă  $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$  ( $a > 0$ ) (fig.6.17.a);

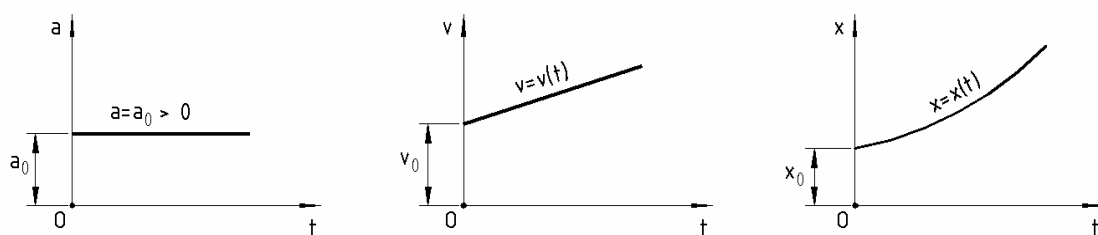


Fig. 6.17.a

- mișcare uniform decelerată (încetinită), dacă  $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$  ( $a < 0$ ) (fig.6.17.b);

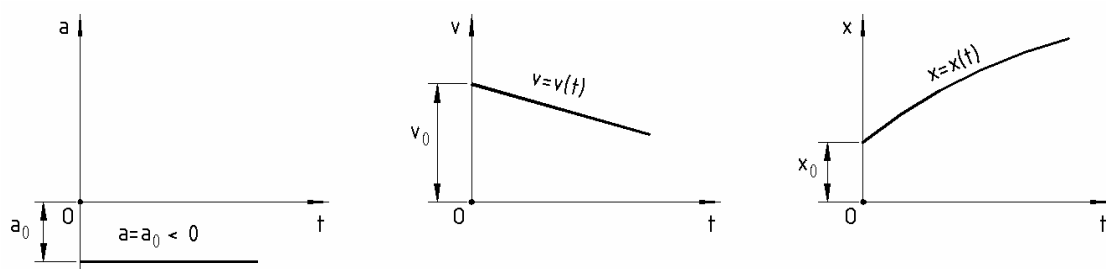


Fig. 6.17.b

## 6.3.2. MIȘCAREA CIRCULARĂ

### 6.3.2.1. STUDIUL MIȘCĂRII ÎN COORDONATE CARTEZIENE

Punctul  $M$  se mișcă pe o traiectorie circulară de rază  $R$ , având legea de mișcare, viteza și accelerația unghiulară date de expresiile:

$$\theta = \theta(t); \quad \dot{\theta} = \omega; \quad \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \varepsilon \quad (6.51)$$

Sistemul cartezian este ales cu originea  $O$ , în centrul cercului (fig.8.18). Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sunt:

$$x = R \cos \theta(t); \quad y = R \sin \theta(t) \quad (6.52)$$

Prin eliminarea parametrului  $t$ , aflat implicit în legea de mișcare  $\theta(t)$  va rezulta traiectoria, care este cercul de rază  $R$  cu centrul în originea  $O$ :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (6.53)$$

Componentele vitezei pe axele sistemului cartezian sunt:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta = -R\omega\sin\theta = -\omega y \\ v_y = \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta = R\omega\cos\theta = \omega x \end{cases} \quad (6.54)$$

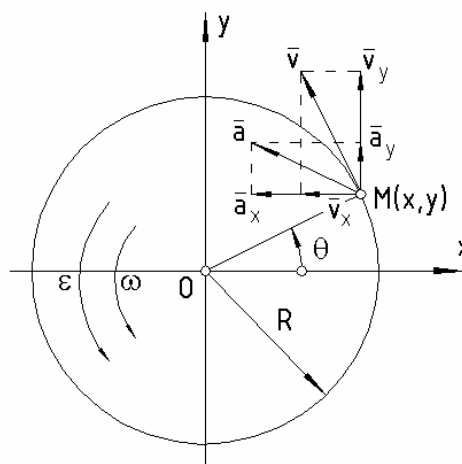


Fig. 6.18

Vectorul viteză are expresia:

$$\bar{v} = -\omega y \bar{i} + \omega x \bar{j} \quad (6.55)$$

și este tangent la traiectorie, adică perpendicular pe  $\overline{OM}$ , deoarece produsul scalar  $\bar{v} \cdot \overline{OM}$  este nul:

$$\bar{v} \cdot \overline{OM} = (-\omega y \bar{i} + \omega x \bar{j}) \cdot (x \bar{i} + y \bar{j}) = -\omega xy + \omega xy = 0$$

Modulul vitezei este:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega R \quad (6.56)$$

Componentele accelerației se obțin prin derivarea componentelor vitezei:

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = -R\dot{\omega} \sin \theta - R\omega \dot{\theta} \cos \theta = -\varepsilon R \sin \theta - \omega^2 R \cos \theta = -\varepsilon y - \omega^2 x \\ a_y = \dot{v}_y = R\dot{\omega} \cos \theta - R\omega \dot{\theta} \sin \theta = \varepsilon R \cos \theta - \omega^2 R \sin \theta = \varepsilon x - \omega^2 y \end{cases} \quad (6.57)$$

Vectorul accelerație are expresia:

$$\bar{a} = (-\varepsilon y - \omega^2 x) \bar{i} + (\varepsilon x - \omega^2 y) \bar{j} \quad (6.58)$$

și modulul:

$$\begin{aligned} |\bar{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-\varepsilon y - \omega^2 x)^2 + (\varepsilon x - \omega^2 y)^2} = \\ &= \sqrt{\varepsilon^2 (x^2 + y^2)^2 + \omega^4 (x^2 + y^2)^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{aligned} \quad (6.59)$$

### 6.3.2.2. STUDIUL MIȘCĂRII ÎN COORDONATE NATURALE

Punctul  $M$  se mișcă pe cercul de rază  $R$ , având legea de mișcare, viteza și accelerația unghiulară date de expresiile:

$$\theta = \theta(t); \quad \dot{\theta} = \omega; \quad \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \varepsilon \quad (6.60)$$

Ecuția orară a mișcării este:

$$s = s(t) = R\theta(t) \quad (6.61)$$

Vectorul viteză are expresia:

$$\bar{v} = \dot{s} \bar{\tau} = R\dot{\theta} \bar{\tau} = R\omega \bar{\tau} \quad (6.62)$$

Componentele vitezei sunt:

$$v_t = R\omega; \quad v_n = 0; \quad v_b = 0 \quad (6.63)$$

iar modulul:

$$|\bar{v}| = v_t = R\omega \quad (6.64)$$

Vectorul accelerație este:

$$\bar{a} = \ddot{s} \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{\nu} = R\varepsilon \bar{\tau} + \frac{(R\omega)^2}{R} \bar{\nu} = \varepsilon R \bar{\tau} + \omega^2 R \bar{\nu} \quad (6.65)$$

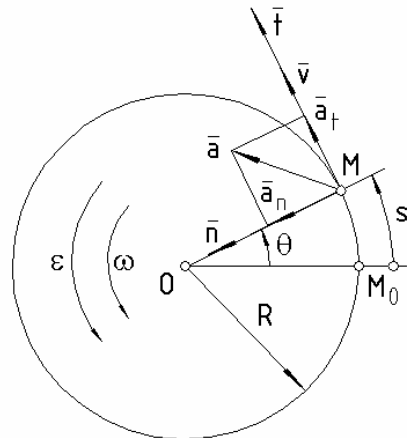


Fig. 6.19

Componentele accelerației sunt:

$$a_t = R\varepsilon; \quad a_n = R\omega^2; \quad a_b = 0 \quad (6.66)$$

Modulul accelerației este:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_b^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (6.67)$$

*Cazuri particulare: 1. mișcarea circulară uniformă*

Se caracterizează prin viteză unghiulară constantă,  $\omega = \omega_0 = ct.$ , deci  $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$ . Caracteristicile unghiulare ale mișcării sunt:

$$\varepsilon = 0; \quad \omega = \omega_0; \quad \theta = \omega t + \theta_0 \quad (6.68)$$

*2. mișcarea circulară uniform variată*

Se caracterizează prin accelerație unghiulară constantă,  $\varepsilon = \varepsilon_0 = ct.$ . Caracteristicile unghiulare ale mișcării sunt:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = ct.; \quad \omega = \varepsilon t + \omega_0; \quad \theta = \varepsilon \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \theta_0 \quad (6.69)$$

*Observație:* Se poate stabili o analogie între mișcarea rectilinie și mișcarea circulară a punctului comparând mărimile:  $x$  cu  $\theta$ ,  $v$  cu  $\omega$  și  $a$  cu  $\varepsilon$ .

Mișcarea	rectilinie	circulară
uniformă	$a = 0$ $v = v_0$ $x = vt + x_0$	$\varepsilon = 0$ $\omega = \omega_0$ $\theta = \omega t + \theta_0$
uniform variată	$a = a_0 = ct.$ $v = at + v_0$ $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$	$\varepsilon = \varepsilon_0 = ct.$ $\omega = \varepsilon t + \omega_0$ $\theta = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \theta_0$

**Aplicații. 1.** Un punct  $M$  descrie un cerc de rază  $R$ , având viteza inițială  $v_0$ . În timpul mișcării unghiul dintre direcția vitezei și accelerației punctului  $M$  este constant și are valoarea  $\alpha$  (fig.6.20). Să se determine expresia vitezei punctului  $M$ , ca funcție de timp.

*Rezolvare.* Unghiul  $\alpha$ , format de vectorii viteză și accelerație este unghiul format și de accelerație cu componenta sa tangențială. Poate fi scrisă relația:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_t}$$

Exprimând cele două componente ale accelerației în funcție de viteza punctului, se poate scrie:

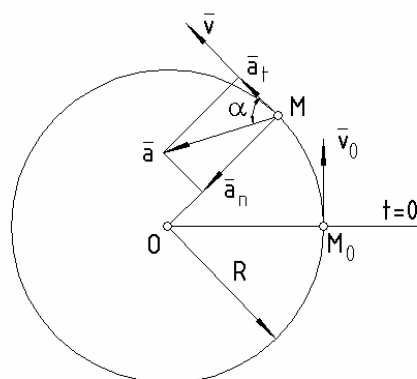


Fig. 6.20

$$a_t = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{v^2}{R} \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{dt}{R} \Rightarrow \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dt}{R} \Rightarrow -\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + C$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dt}{R} \Rightarrow -\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + C$$

Constanta de integrare  $C$ , se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0, \quad v(0) = v_0 \text{ și } C = -\frac{1}{v_0}$$

și:

$$-\frac{1}{v} = \frac{t}{R} - \frac{1}{v_0}; \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{t}{R} \Rightarrow v = \frac{v_0 R}{v_0 R - t}$$

2. Un punct  $M$  se deplasează pe un cerc de rază  $R$ , după legea  $s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$ . Să se determine mărimea accelerației punctului. Când aceasta va fi egală cu  $a$  și câte rotații efectuează punctul până în acel moment?

*Rezolvare.* În mișcarea pe o curbă, accelerația punctului are expresia:

$$\vec{a} = a_t \vec{\tau} + a_n \vec{\nu}$$

unde:

$$a_t = \ddot{s} = -a, \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{(v_0 - at)^2}{R}$$

Deci:

$$\vec{a} = -a \vec{\tau} + \frac{(v_0 - at)^2}{R} \vec{\nu}$$

Modulul accelerației are expresia:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a^2 + \frac{(v_0 - at)^4}{R^2}}$$

Din condiția ca la un moment  $t = t_1$ , mărimea accelerației punctului să devină  $a$ , rezultă:

$$\sqrt{a^2 + \frac{(v_0 - at_1)^4}{R^2}} = a, \quad a^2 + \frac{(v_0 - at_1)^4}{R^2} = a^2 \Rightarrow v_0 - at_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{a}$$

Exprimând ecuația orară a mișcării în funcție de legea de mișcare a punctului pe cerc, definită de unghiul la centru  $\theta = \theta(t)$ , rezultă:

$$s(t) = R\theta(t) \Rightarrow \theta(t) = \frac{s(t)}{R} = \frac{1}{R}(v_0 t - \frac{1}{2} a t^2)$$

În timpul  $t = t_1 = \frac{v_0}{a}$ , punctul efectuează  $n$  rotații, adică:

$$\theta(t_1) = 2\pi n$$



$$\frac{1}{R}(v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2) = 2\pi n \Rightarrow n = \frac{1}{2\pi R}(v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2) = \frac{1}{2\pi R}(v_0 \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2}) = \frac{v_0^2}{4\pi a R}$$

3. Două puncte  $M_1$  și  $M_2$  se deplasează pe un cerc de rază  $R$ . Ele pornesc în același moment  $t = 0$ , dintr-un punct  $A$ , cu viteze egale și de sens contrar. Punctul  $M_1$  are o mișcare uniformă iar punctul  $M_2$ , o mișcare uniform încetinită (fig.6.21). Știind că cele două puncte se întâlnesc prima oară în punctul  $B$ , unde se anulează viteza punctului  $M_2$ , să se determine poziția punctului  $B$ , definită de unghiul la centru  $\theta_{1B}$  și timpul după care are loc întâlnirea  $t_B$ .

*Rezolvare.* Pozițiile celor două puncte pe cerc sunt definite de unghiurile la centru pe care le formează cu axa de referință  $OA$ .

Condițiile inițiale ale mișcării sunt:

$$t = 0 \begin{cases} \omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_0 = \frac{v_0}{R} \\ \theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Mișcările celor două puncte sunt definite de ecuațiile:

$$\begin{cases} M_1 : \varepsilon_1 = 0; \omega_1 = \omega_0; \theta_1 = \omega_0 t \\ M_2 : \varepsilon_2 < 0; \omega_2 = \varepsilon_2 t + \omega_0; \theta_2 = \varepsilon_2 \frac{t^2}{2} + \omega_0 t \end{cases}$$

Pentru determinarea timpului de întâlnire  $t_B$  se impun condițiile:

$$t = t_B \begin{cases} \omega_2(t_B) = 0 \\ \theta_1(t_B) + \theta_2(t_B) = 2\pi \end{cases}$$

Obținem un sistem de două ecuații cu necunoscutele  $\varepsilon_2$  și  $t_B$ .

$$\begin{cases} \omega_0 + \varepsilon_2 t_B = 0 \\ \omega_0 t_B + \varepsilon_2 \frac{t_B^2}{2} + \omega_0 t_B = 2\pi \end{cases}$$

cum  $\varepsilon_2 = -\frac{\omega_0}{t_B}$ , rezultă:

$$\frac{3\omega_0 t_B}{2} = 2\pi \Rightarrow t_B = \frac{4\pi}{3\omega_0} = \frac{4\pi}{3 \frac{v_0}{R}} = \frac{4\pi R}{3v_0}$$

Poziția punctului  $B$  este dată de unghiul  $\theta_{1B} = \theta_1(t_B)$ :

$$\theta_{1B} = \theta_1(t_B) = \omega_0 t_B = \frac{v_0}{R} \frac{4\pi R}{3v_0} = \frac{4\pi}{3}$$

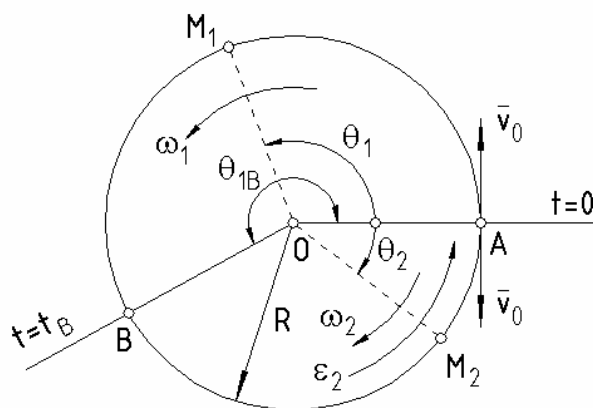


Fig. 6.21

4. Două puncte  $M_1$  și  $M_2$  pornesc în același moment  $t = 0$ , dintr-un punct  $A$ , cu viteze egale  $v_0$  (fig.6.22). Punctul  $M_1$  are o mișcare uniform accelerată pe *semicercul*  $AB$  de rază  $R$  iar punctul  $M_2$  are o mișcare uniform încetinită pe *diametrul*  $AB$ . Dacă accelerația tangențială a

punctului  $M_1$  este egală cu accelerația punctului  $M_2$ , iar cele două puncte ajung simultan în punctul  $B$ , să se determine timpul de întâlnire  $t_B$  și accelerațiile celor două puncte  $a_{t1}$  și  $a_2$ .

*Rezolvare.* Caracteristicile mișcărilor celor două puncte sunt:

$$M_1 : \begin{cases} v_1 = a_{t1}t + C_1 \\ s_1 = \frac{1}{2}a_{t1}t^2 + C_1t + C_2 \end{cases}$$

$$M_2 : \begin{cases} v_2 = a_2t + C_3 \\ s_2 = \frac{1}{2}a_2t^2 + C_3t + C_4 \end{cases}$$

Condițiile inițiale ale mișcării sunt:

$$t = 0 \quad \begin{cases} v_1(0) = v_2(0) = v_0 \\ s_1(0) = s_2(0) = 0 \end{cases}$$

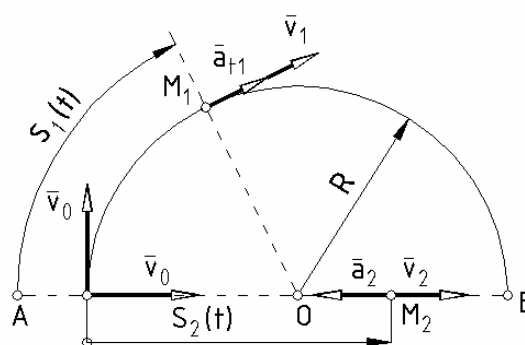


Fig. 6.22

Introducând aceste condiții în cele două sisteme de ecuații de mai sus, rezultă:

$$C_1 = C_3 = v_0; \quad C_2 = C_4 = 0$$

Introducând valorile constantelor de integrare și condiția impusă accelerațiilor celor două puncte ( $a_{t1} = -a_2 = a$ ), caracteristicile mișcărilor acestora devin:

$$M_1 : \begin{cases} v_1 = at + v_0 \\ s_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \end{cases} \quad M_2 : \begin{cases} v_2 = -at + v_0 \\ s_2 = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t \end{cases}$$

Pentru determinarea timpului de întâlnire  $t_B$  se impun condițiile:

$$t = t_B \quad \begin{cases} s_1(t_B) = 2\pi R \\ s_2(t_B) = 2R \end{cases}$$

Rezultă sistemul de ecuații având ca necunoscute accelerațiile celor două puncte și timpul de întâlnire

$$\begin{cases} \frac{1}{2}at_B^2 + v_0t_B = 2\pi R \\ -\frac{1}{2}at_B^2 + v_0t_B = 2R \end{cases}$$

valorile acestora fiind:

$$t_B = \frac{\pi + 2}{2} \frac{R}{v_0}; \quad a = a_{t1} = -a_2 = 4 \frac{\pi - 2}{(\pi + 2)^2} \frac{v_0^2}{R}$$

## TEST DE EVALUARE

- Caracteristicile mișcării punctului sunt:
  - traectoria și legea de mișcare
  - viteza și accelerația
  - ambele variante  $a$  și  $b$
- Cunoscând coordonatele unui punct în mișcare, ca funcții de timp  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$ , traectoria se obține prin:
  - eliminarea timpului în cele trei ecuații parametrice
  - intersecția planelor  $f_1(x,y,z)=0$  și  $f_2(x,y,z)=0$

- c. nici una din variantele  $a$  și  $b$
- 3. Viteza este:
  - a. o mărime scalară, tangentă la traiectorie
  - b. o mărime vectorială
  - c. o mărime vectorială care precizează direcția și sensul mișcării
- 4. Accelerația este:
  - a. o mărime vectorială
  - b. o mărime scalară care exprimă variația vitezei în timp
  - c. o mărime vectorială care exprimă variația vitezei în timp, ca mărime, direcție și sens
- 5. Mișcarea uniform variată este caracterizată de:
  - a. viteză constantă
  - b. accelerație constantă
  - c. nici una din variantele  $a$  și  $b$
- 6. Sistemul de coordonate naturale (Triedrul Frenet) este:
  - a. un sistem triortogonal fix
  - b. un sistem triortogonal mobil, atașat punctului în mișcare
  - c. un sistem fix atașat traiectoriei punctului
- 7. Accelerația unui punct este:
  - a. un vector tangent la traiectorie
  - b. un vector normal la traiectorie (îndreptat către centrul de curbura)
  - c. un vector orientat spre interiorul curbei
- 8. Legea de mișcare a punctului pe cerc este definită de:
  - a. unghiul la centru  $\theta = \theta(t)$
  - b. legea orară a mișcării  $s = s(t)$
  - c. ambele variante  $a$  și  $b$
- 9. Accelerația unghiulară în mișcarea punctului pe cerc este o mărime:
  - a. scalară
  - b. vectorială
  - c. vectorială, numai când legea de mișcare se consideră vector
- 10. Accelerația unui punct în mișcarea pe un cerc de rază  $R$  are valoarea:
  - a.  $|\vec{a}| = R\varepsilon$
  - b.  $|\vec{a}| = R\omega^2$
  - c.  $|\vec{a}| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$
- 11. În mișcare unui punct pe cerc cu viteză constantă, accelerația este:
  - a. nulă
  - b. diferită de zero
  - c. nici una din variantele  $a$  sau  $b$
- 12. Pentru ca accelerația unui punct să fie nulă trebuie ca:
  - a. mișcarea să fie uniformă
  - b. mișcarea să fie rectilinie
  - c. variantele  $a$  și  $b$  împreună

## 7. CINEMATICA RIGIDULUI

### 7.1. MIȘCAREA GENERALĂ A RIGIDULUI

#### 7.1.1. MOBILITATEA RIGIDULUI

Mișcarea rigidului este determinată când se cunosc *expresiile generale, ca funcții de timp, pentru vectorul de poziție, viteza și accelerația unui punct oarecare M al rigidului*, în raport cu un punct  $O_1$ , presupus fix.

Pentru efectuarea studiului se alege un sistem de referință admis fix  $O_1x_1y_1z_1$ , de versori  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$  și un sistem de referință mobil solidar cu corpul în mișcare,  $Oxyz$  de versori  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  (fig.7.1). Alegerea punctului  $O$  ca origine a sistemului mobil este arbitrară.

Vectorul de poziție al punctului  $M$ , față de sistemul fix este  $\bar{r}_1$  iar față de sistemul mobil este  $\bar{r}$ . Poziția originii sistemului mobil față de sistemul fix este definită de vectorul  $\bar{r}_0$ . Se poate scrie relația:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r} \quad (7.1)$$

Ecuția (7.1) poate fi exprimată și ca o ecuație vectorială funcție de timp:

$$\bar{r}_1(t) = \bar{r}_0(t) + x\bar{i}(t) + y\bar{j}(t) + z\bar{k}(t) \quad (7.2)$$

Vectorul  $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t)$  este o funcție vectorială de timp, continuă, uniformă și derivabilă de cel puțin două ori.

Vectorul  $\overline{OM} = \bar{r} = x\bar{i}(t) + y\bar{j}(t) + z\bar{k}(t)$  are modulul constant  $|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$ , și direcția variabilă, deoarece distanța dintre punctele  $O$  și  $M$  nu se modifică, conform ipotezei rigidității corpului. În consecință, proiecțiile  $x, y, z$  ale acestui vector, pe axele sistemului de referință mobil sunt constante. Versorii  $\bar{i}(t), \bar{j}(t), \bar{k}(t)$  sunt funcții vectoriale de timp deoarece își schimbă în timp poziția, odată cu axele pe care le caracterizează.

Un vector funcție de timp se exprimă cu ajutorul a 3 funcții scalare de timp (proiecțiile pe axele sistemului cartezian). Prin umare, conform relației (9.2) vectorul  $\bar{r}_1(t)$  se exprimă cu 12 funcții scalare de timp, care provin de la mărimile vectoriale:  $\bar{r}_0(t), \bar{i}(t), \bar{j}(t), \bar{k}(t)$ . Cele 12 funcții scalare nu sunt independente, deoarece pot fi scrise 6 relații specifice, datorită faptului că versorii  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  sunt versorii unui sistem de axe triortogonal.

$$\bar{i}^2 = 1; \bar{j}^2 = 1; \bar{k}^2 = 1 \quad (7.3)$$

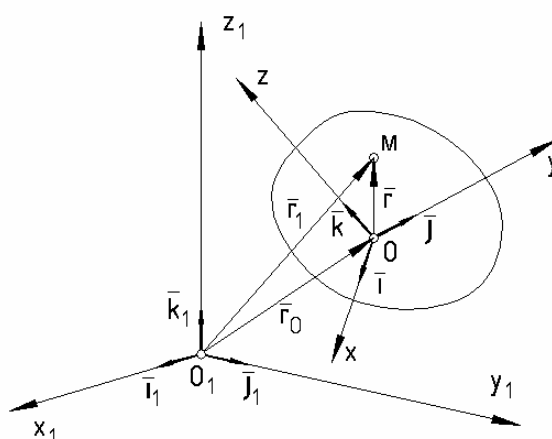


Fig. 7.1

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = 0; \quad \bar{j} \cdot \bar{k} = 0; \quad \bar{k} \cdot \bar{i} = 0 \quad (7.4)$$

Rezultă că vectorul  $\bar{r}_I(t)$  poate fi exprimat cu ajutorul a 6 funcții scalare de timp, independente: 3 provin de la vectorul  $\bar{r}_0$ , care definește poziția originii sistemului de referință mobil, în raport cu cel fix iar 3 provin de la versorii  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ , care dau orientarea sistemului mobil față de cel fix.

S-a demonstrat astfel și pe cale cinematică, faptul că *un rigid liber în spațiu are 6 grade de libertate*.

### 7.1.2. DISTRIBUȚIA DE VITEZE

Pentru calculul vitezei punctului  $M$ , arbitrar ales se derivează în raport cu timpul relația (7.1):

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}_I = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{r}} \quad (7.5)$$

unde:

$$\dot{\bar{r}}_0 = \bar{v}_0 \quad (7.6)$$

reprezintă viteza originii  $O$  a sistemului mobil, din mișcarea față de sistemul fix.

$$\dot{\bar{r}} = x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} \quad (7.7)$$

reprezintă viteza punctului  $M$ , solidar cu sistemul mobil.

Pentru calculul derivatelor în raport cu timpul ale versorilor  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  se derivează în raport cu timpul, mai întâi, relațiile (7.3) și (7.4).

$$\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i} = 0; \quad \dot{\bar{j}} \cdot \bar{j} = 0; \quad \dot{\bar{k}} \cdot \bar{k} = 0 \quad (7.8)$$

$$\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} + \bar{i} \cdot \dot{\bar{j}} = 0; \quad \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} + \bar{j} \cdot \dot{\bar{k}} = 0; \quad \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} + \bar{k} \cdot \dot{\bar{i}} = 0 \quad (7.9)$$

Pentru expresiile scalare care intervin în (7.9) se introduce convenția de a fi considerate ca proiecții pe axele sistemului  $Oxyz$ , ale unui vector arbitrar  $\bar{\omega}$ .

$$\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = -\bar{i} \cdot \dot{\bar{j}} = \omega_z; \quad \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = -\bar{j} \cdot \dot{\bar{k}} = \omega_x; \quad \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = -\bar{k} \cdot \dot{\bar{i}} = \omega_y \quad (7.10)$$

Pentru scrierea derivatelor versorilor în raport cu timpul  $\dot{\bar{i}}, \dot{\bar{j}}, \dot{\bar{k}}$  se are în vedere scrierea, în general, a unui vector prin proiecții pe axele de versori corespunzători.

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} = (\bar{V} \cdot \bar{i}) \bar{i} + (\bar{V} \cdot \bar{j}) \bar{j} + (\bar{V} \cdot \bar{k}) \bar{k} \quad (7.11)$$

Având în vedere, relația (7.11) și rezultatele din (7.8), respectiv (7.10), derivatele versorilor  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  se pot scrie astfel:

$$\dot{\bar{i}} = (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i}) \bar{i} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j}) \bar{j} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{k}) \bar{k} = 0 \cdot \bar{i} + \omega_z \bar{j} - \omega_y \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{\omega} \times \bar{i}$$

$$\dot{\bar{j}} = (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{i})\bar{i} + (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{j})\bar{j} + (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{k})\bar{k} = -\omega_z \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + \omega_x \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{\omega} \times \bar{j} \quad (7.12)$$

$$\dot{\bar{k}} = (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i})\bar{i} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{j})\bar{j} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{k})\bar{k} = \omega_y \bar{i} - \omega_x \bar{j} + 0 \cdot \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{\omega} \times \bar{k}$$

numite *relațiile Poisson*.

Putem exprima derivata vectorului  $\dot{\bar{r}}$ , introducând relațiile Poisson (7.12) în relația (7.7).

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} = x(\bar{\omega} \times \bar{i}) + y(\bar{\omega} \times \bar{j}) + z(\bar{\omega} \times \bar{k}) = \\ &= \bar{\omega} \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{r} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Introducând relațiile (9.6) și (9.13) în relația (9.5) rezultă:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (7.14)$$

Relația (7.14) se numește *relația Euler pentru distribuția de viteze a rigidului*. Distribuția de viteze se exprimă cu ajutorul a două funcții vectoriale de timp,  $\bar{v}_0(t)$  și  $\bar{\omega}(t)$ .

Componentele pe axele sistemului mobil, ale vitezei se obțin din dezvoltarea relației (7.14)

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + z\omega_y - y\omega_z \\ v_y = v_{0y} + x\omega_z - z\omega_x \\ v_z = v_{0z} + y\omega_x - x\omega_y \end{cases} \quad (7.15)$$

### 7.1.3. DISTRIBUȚIA DE ACCELERAȚII

Pentru calculul accelerației  $\bar{a}$  a punctului  $M$  aparținând rigidului în mișcare generală, se derivează în raport cu timpul, viteza dată de relația (7.14).

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} \quad (7.16)$$

Accelerația punctului  $O$  față de reperul fix este:

$$\bar{a}_0 = \dot{\bar{v}}_0 = \ddot{\bar{r}}_0 \quad (7.17)$$

Notând cu  $\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$  - un vector arbitrar, obținut ca derivata în raport cu timpul a vectorului  $\bar{\omega}$  și introducând relația (7.13), rezultă:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (7.18)$$

Ecuția (7.18) este cunoscută și sub numele de *formula Euler pentru distribuția de accelerații*.

Componentele accelerației pe axele reperului mobil se determină exprimând analitic produsele vectoriale din relația Euler (7.18), în care vectorii  $\bar{\omega}$  și  $\bar{\varepsilon}$ , au expresiile:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_x \bar{i} + \varepsilon_y \bar{j} + \varepsilon_z \bar{k} \quad (7.19)$$

Rezultă:

$$\begin{cases} a_x = a_{0x} + (z\varepsilon_y - y\varepsilon_z) + \omega_y(y\omega_x - x\omega_y) + \omega_z(z\omega_x - x\omega_z) \\ a_y = a_{0y} + (x\varepsilon_z - z\varepsilon_x) + \omega_z(z\omega_y - y\omega_z) + \omega_x(x\omega_y - y\omega_x) \\ a_z = a_{0z} + (y\varepsilon_x - x\varepsilon_y) + \omega_x(x\omega_z - z\omega_x) + \omega_y(y\omega_z - z\omega_y) \end{cases} \quad (7.20)$$

sau:

$$\begin{cases} a_x = a_{0x} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x + (\omega_x\omega_y - \varepsilon_z)y + (\omega_x\omega_z + \varepsilon_y)z \\ a_y = a_{0y} - (\omega_x^2 + \omega_z^2)y + (\omega_y\omega_z - \varepsilon_x)z + (\omega_x\omega_y + \varepsilon_z)x \\ a_z = a_{0z} - (\omega_x^2 + \omega_y^2)z + (\omega_x\omega_z - \varepsilon_y)x + (\omega_y\omega_z + \varepsilon_x)y \end{cases} \quad (7.21)$$

Pentru a găsi punctele de accelerație nulă este necesar ca  $a_x = a_y = a_z = 0$ . Introducând aceste condiții în sistemul (7.21) se obține un sistem de ecuații algebrice liniare și omogene în  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} a_{0x} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x + (\omega_x\omega_y - \varepsilon_z)y + (\omega_x\omega_z + \varepsilon_y)z = 0 \\ a_{0y} + (\omega_x\omega_y + \varepsilon_z)x - (\omega_x^2 + \omega_z^2)y + (\omega_y\omega_z - \varepsilon_x)z = 0 \\ a_{0z} + (\omega_x\omega_z - \varepsilon_y)x + (\omega_y\omega_z + \varepsilon_x)y - (\omega_x^2 + \omega_y^2)z = 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

Determinantul acestui sistem este :

$$\Delta = -(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon})^2 \quad (7.23)$$

În general vectorii  $\bar{\omega}$  și  $\bar{\varepsilon}$  nu sunt coliniari și în consecință  $\Delta \neq 0$ .

## 7.2. MIȘCĂRI PARTICULARE ALE RIGIDULUI

### 7.2.1. MIȘCAREA DE TRANSLAȚIE

*Un rigid execută o mișcare de translație când orice dreaptă a acestuia rămâne paralelă cu ea însăși în timpul mișcării.*

În baza definiției rezultă că și axele sistemului mobil (solidar legat de rigid) rămân paralele cu direcții fixe. În consecință se pot alege triedrele fix,  $Ox_1y_1z_1$  și mobil  $Oxyz$  cu axele paralele (fig.7.2).

Poziția, la un moment dat a rigidului poate fi precizată numai cu ajutorul vectorului de poziție al originii sistemului mobil,  $O$ , în raport cu triedrul fix.

$$\bar{r}_0 = x_0(t)\bar{i} + y_0(t)\bar{j} + z_0(t)\bar{k} \quad (7.24)$$

Rezultă că în mișcarea de translație, *rigidul are trei grade de libertate* întrucât poziția acestuia este definită de cele trei funcții scalare de timp, independente:

$$x = x_0(t); y = y_0(t); z = z_0(t) \quad (7.25)$$

Ținând cont de faptul că sistemele fix și mobil au fost alese cu axele paralele, versorii  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  ai sistemului mobil, au direcțiile fixe și în consecință:

$$\dot{\bar{i}} = \dot{\bar{j}} = \dot{\bar{k}} = 0 \quad (7.26)$$

Conform relațiilor *Poisson* (7.12):

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i} = 0; \quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j} = 0; \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k} = 0 \quad (7.27)$$

Relațiile (7.27) sunt satisfăcute simultan numai dacă:

$$\bar{\omega} = 0 \quad (7.28)$$

și de aici, prin derivare în raport cu timpul se obține vectorul  $\bar{\varepsilon}$ :

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0 \quad (7.29)$$

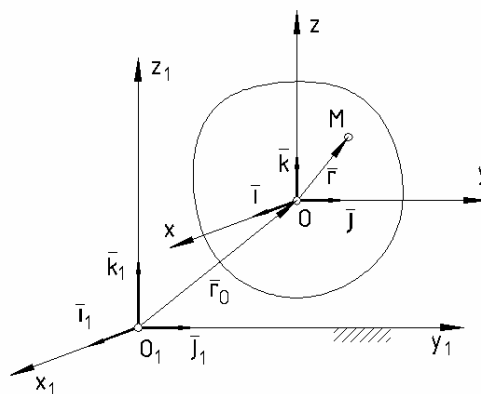


Fig. 7.2

### 7.2.2.1. DISTRIBUȚIA DE VITEZE

Plecând de la formula generală Euler (9.14) și ținând seama de relația (7.28) se obține expresia distribuției de viteze în mișcarea de translație:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 \quad (7.30)$$

*La un moment dat, toate punctele rigidului au aceeași viteză ca vector (mărime, direcție și sens). În această mișcare, viteza este un vector liber.*

### 7.2.2.2. DISTRIBUȚIA DE ACCELERAȚII

Plecând de la formula Euler (7.18) și ținând seama de relațiile (7.28) și (7.29) se obține expresia distribuției de accelerații în mișcarea de translație:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 \quad (7.31)$$

*La un moment dat, toate punctele rigidului au aceeași accelerație ca vector (mărime, direcție și sens). Accelerația este un vector liber.*

**Aplicație.** Să se calculeze viteza și accelerația unui punct  $M$  aparținând bielei de cuplare  $AB$  a mecanismului (patrulater) din figura 7.3. Roata motoare  $O_1$  de rază  $R$ , identică cu roata condusă  $O_2$  se rotește cu viteză unghiulară constantă  $\omega$ , distanța dintre cele două roți fiind egală cu lungimea bielei de cuplare ( $O_1O_2 = AB$ ).



*Rezolvare.* Biela de cuplare  $AB$  efectuează o mișcare de translație deoarece rămâne tot timpul mișcării paralelă cu dreapta fixă  $O_1O_2$ . Prin urmare orice punct de pe bielă are la un moment dat, aceeași viteză și accelerație ca și extremitatea  $A$  care aparține atât bielei  $AB$  cât și roții motoare  $O_1$ . Cum punctul  $A$  descrie un cerc de rază  $R$  cu viteză unghiulară constantă  $\omega$ , viteza și accelerația acestuia sunt:

$$v_M = v_A = \omega R$$

care este un vector tangent în punctul  $A$  la roata  $O_1$

$$a_M = a_A^n = \omega^2 R$$

fiind un vector orientat către centrul roții.

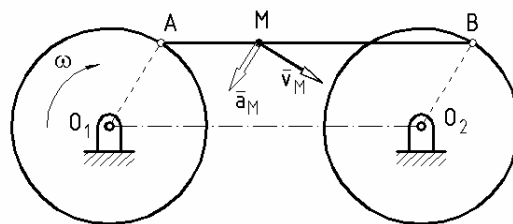


Fig. 7.3

## 7.2.2. MIȘCAREA RIGIDULUI CU AXĂ FIXĂ (DE ROTAȚIE)

*Un rigid execută o mișcare de rotație (sau mișcare de rigid cu axă fixă), dacă două puncte ale sale (adică o axă) rămân fixe în spațiu în tot timpul mișcării. Dreapta determinată de cele două puncte fixe  $O_1$  și  $O_2$  ale rigidului poartă numele de axă de rotație (fig.7.4.a). Punctele rigidului în mișcare de rotație descriu cercuri dispuse în plane perpendiculare pe axa de rotație  $O_1O_2$ , cu centrele pe axa de rotație.*

Pentru simplificarea studiului, originile celor două sisteme de referință se consideră în același punct,  $O_1 \equiv O$  și axele  $Oz_1 \equiv Oz \equiv \Delta$  coincid cu axa de rotație.

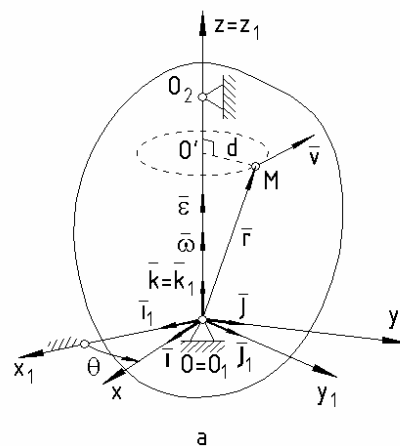
Poziția rigidului în timp poate fi complet precizată cu ajutorul unghiului  $\theta = \theta(t)$ , unghi format de axa  $Ox$  a sistemului mobil cu axa  $O_1x_1$  a sistemului fix și care constituie legea de mișcare a rigidului. *Rigidul în mișcare de rotație are un singur grad de libertate.*

Această mișcare particulară se obține din mișcarea generală a rigidului cu simplificările menționate mai sus:

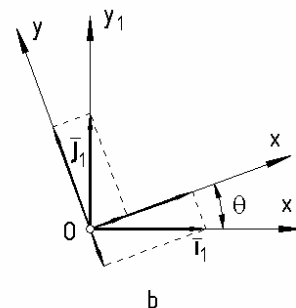
$$\begin{cases} O_1 \equiv O \Rightarrow \bar{v}_0 = 0; \bar{a}_0 = 0 \\ O_1z_1 \equiv Oz; \bar{k}_1 \equiv \bar{k} \Rightarrow \dot{\bar{k}}_1 = \dot{\bar{k}} = 0 \end{cases} \quad (7.32)$$

În consecință:

$$\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = \omega_y = 0; \dot{\bar{k}} \cdot \bar{j} = -\omega_x = 0 \quad (7.33)$$



a



b

Fig. 7.4

Cum componenta vectorului  $\bar{\omega}$ , pe direcția  $Oz$  este definită de relația:

$$\omega_z = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} \neq 0 \quad (7.34)$$

este necesar să se calculeze derivata în raport cu timpul a versorului  $\bar{i}$ :

Variația în timp, ca direcție, a versorilor  $\bar{i}$  și  $\bar{j}$  (fig.7.4.b) este:

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}} = \cos \theta \bar{i}_1 + \sin \theta \bar{j}_1 \\ \dot{\bar{j}} = -\sin \theta \bar{i}_1 + \cos \theta \bar{j}_1 \end{cases} \quad (9.35)$$

Derivata în raport cu timpul a versorului  $\bar{i}$  este:

$$\dot{\bar{i}} = -\dot{\theta} \sin \theta \bar{i}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \bar{j}_1 = \dot{\theta}(-\sin \theta \bar{i}_1 + \cos \theta \bar{j}_1) = \dot{\theta} \bar{j} \quad (7.36)$$

și:

$$\omega = \omega_z = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = \dot{\theta} \bar{j} \cdot \bar{j} = \dot{\theta} \quad (7.37)$$

rezultă:

$$\bar{\omega} = \omega \bar{k} = \dot{\theta} \bar{k} \quad (7.38)$$

Se poate da un sens fizic vectorului  $\bar{\omega}$ : este un vector care caracterizează mișcarea de rotație a rigidului, fapt pentru care este numit *vector viteză unghiulară*. Are ca suport axa de rotație, sensul fiind dat de regula șurubului drept, iar modulul, dat de derivata în raport cu timpul a legii de mișcare,  $\theta(t)$ .

În mod analog se poate demonstra că:

$$\varepsilon = \varepsilon_z = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (7.39)$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \bar{k} = \dot{\omega} \bar{k} = \ddot{\theta} \bar{k} \quad (7.40)$$

Și în acest caz se poate da un sens fizic vectorului  $\bar{\varepsilon}$ . Întrucât reprezintă derivata în raport cu timpul a vectorului viteză unghiulară  $\bar{\omega}$ , el se umește *vector accelerație unghiulară*. Are ca suport axa de rotație, sensul dat de regula șurubului drept și modulul dat de derivata vitezei unghiulare,  $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ .

### 7.2.2.1. DISTRIBUȚIA DE VITEZE

Distribuția de viteze se stabilește pornind de la formula generală Euler (7.14) și ținând seama de particularitățile acestei mișcări date de relația (7.32):

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (7.41)$$

Expresia analitică a vitezei se obține din relația (7.41), exprimând vectorii prin componentele pe axe:

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \bar{i} + \omega x \bar{j} \quad (7.42)$$

Rezultă componentele pe axe ale vitezei:

$$v_x = -\omega y; v_y = \omega x; v_z = 0 \quad (7.43)$$

*Proprietățile câmpului de viteze:*

- punctele situate pe axa de rotație au viteze nule.
- vitezele sunt conținute în plane perpendiculare pe axa de rotație, deoarece  $v_z=0$ .
- vitezele punctelor situate pe o dreaptă perpendiculară pe axa de rotație sunt perpendiculare pe această dreaptă și modulele lor sunt direct proporționale cu distanța de la punct la axa de rotație (fig.7.5.a).

### 7.2.2.2. DISTRIBUȚIA DE ACCELERAȚII

Dacă în formula Euler (7.18) privind distribuția de accelerații se fac particularizările specifice mișcării de rotație (7.32) se obține:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (7.44)$$

care reprezintă câmpul de accelerații al unui rigid în mișcare de rotație.

Expresiile analitice ale accelerației se obțin din relația (7.44), exprimând vectorii prin componentele pe axe:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-y\varepsilon - x\omega^2)\bar{i} + (x\varepsilon - y\omega^2)\bar{j} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Rezultă componentele pe axe ale accelerației:

$$a_x = -y\varepsilon - x\omega^2, \quad a_y = x\varepsilon - y\omega^2, \quad a_z = 0 \quad (7.46)$$

Proprietățile câmpului de accelerații sunt analoage cu cele ale câmpului de viteze, cu singura deosebire că accelerațiile sunt înclinate față de o dreaptă perpendiculară pe axa de rotație (fig.7.5.b) sub același unghi  $\varphi$ , dat de relația:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|a_y|}{|a_x|} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = ct.$$

*Observații:*

1. Studiul vitezelor și accelerațiilor poate fi efectuat și când se consideră  $O \equiv O_I$ , însă nici una dintre axele triedrului nu constituie axă de rotație. În acest caz vectorii viteză și accelerație unghiulară au expresiile:

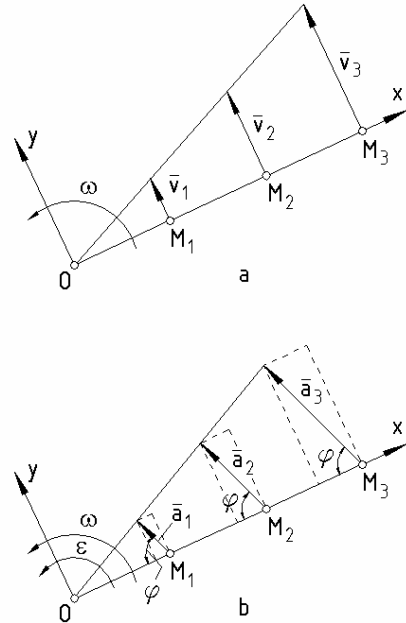


Fig. 7.5

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \\ \bar{\varepsilon} = \varepsilon_x \bar{i} + \varepsilon_y \bar{j} + \varepsilon_z \bar{k} \end{cases} \quad (7.47)$$

2. Dacă  $|\bar{\omega}| = ct.$ , mișcarea se numește *uniformă*, iar dacă  $|\bar{\varepsilon}| = ct.$ , mișcarea se numește *uniform variată*. Dacă  $\bar{\omega} \cdot \bar{\varepsilon} > 0$ , mișcarea se numește *accelerată*, iar dacă  $\bar{\omega} \cdot \bar{\varepsilon} < 0$ , mișcarea se numește *încetinită (decelerată)*.
3. În tehnică, pentru mașinile rotative se dă turația  $n$  exprimată în *rot/min*. Legătura dintre viteza unghiulară și turație este dată de relația:

$$\omega (s^{-1}) = \frac{\pi}{30} n (rot / min) \quad (7.48)$$

### 7.2.2.3. TRANSMITEREA MIȘCĂRII DE ROTAȚIE

Transmiterea mișcării de rotație se realizează prin:

- roți dințate și roți cu fricțiune
- curele și lanțuri

Se consideră două roți (*dințate sau cu fricțiune*) cu axe paralele: roata motoare  $O_1$ , de rază  $R_1$  cu viteză unghiulară  $\omega_1$  și roata condusă  $O_2$ , de rază  $R_2$  cu viteză unghiulară  $\omega_2$  (fig.7.6).

Se definește *raportul de transmitere* al mișcării ca fiind raportul vitezelor unghiulare ale roții motoare și celei conduse:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (7.49)$$

Raportul de transmitere al mișcării poate fi exprimat și funcție de turațiile celor două roți. Având în vedere relația dintre viteza unghiulară, exprimată în *rad/s* sau  $s^{-1}$  și turația exprimată în *rot/min* -  $\omega_i = \pi n_i / 30$ , rezultă:

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} \quad (7.50)$$

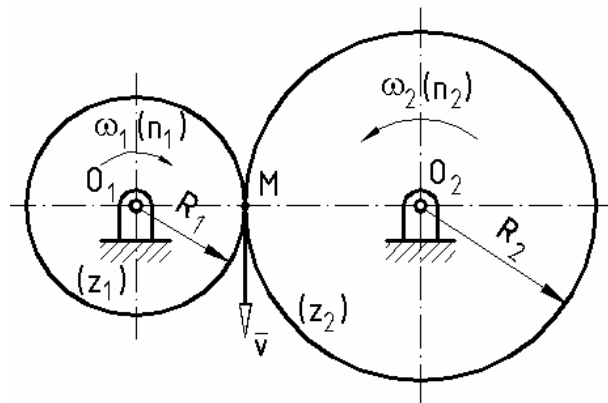


Fig. 7.6

Condiția de transmitere a mișcării (să nu existe alunecare între cele două roți) este ca viteza punctului de contact dintre roți să fie aceeași:

$$v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad (7.51)$$

Raportul vitezelor unghiulare ale celor două roți pote fi exprimat și funcție de raportul razelor acestora:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (7.52)$$

Raportul de transmitere al mișcării este:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (7.53)$$

Pentru roțile dințate, raportul de transmitere al mișcării poate fi exprimat și în funcție de numărul de dinți ale celor două roți. Condiția de angrenare este ca modulul celor două roți dințate, definit de relația (7.54) să fie același:

$$m = \frac{p}{\pi} \quad (7.54)$$

unde  $p$  este pasul danturii, definit ca fiind lungimea arcului dintre două flancuri succesive, măsurat pe cercul de rostogolire.

Înmulțind ambii termeni ai relației (7.54) cu numărul de dinți  $z_i$  și cum produsul  $p \cdot z_i$  reprezintă lungimea cercului de rostogolire, obținem:

$$mz_i = \frac{pz_i}{\pi} = \frac{2\pi R_i}{\pi} = 2R_i \Rightarrow R_i = \frac{mz_i}{2} \quad (7.55)$$

și cu ajutorul căreia poate fi exprimat raportul razelor celor două roți:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{mz_2 / 2}{mz_1 / 2} = \frac{z_2}{z_1} \quad (7.56)$$

În cazul transmiterii mișcării cu roți dințate, raportul de transmitere este:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (7.57)$$

Pentru o transmisie prin lanțuri sau curele, roțile având axele paralele, condiția de transmitere a mișcării este ca vitezele periferice ale celor două roți să fie egale, întrucât în punctele de contact dintre cureauă sau lanț și roți nu există alunecare (fig. 7.7).

Raportul de transmitere al mișcării este dat de relația (7.53):

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

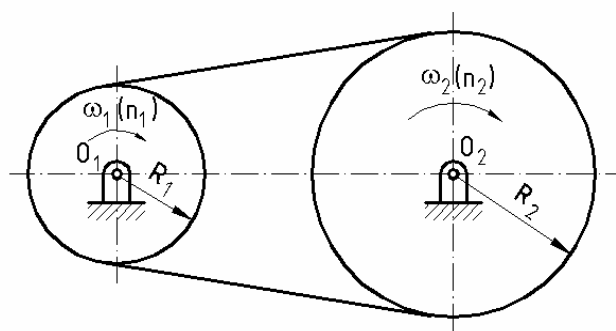


Fig. 7.7

Pentru o transmisie cu “ $n$ ” roți cu arbori paraleli, raportul de transmitere este:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} \quad (7.58)$$

Dacă între cei doi arbori ai roții motoare și conduse intervin arbori intermediari, rapoartele de transmitere dintre două roți consecutive devin:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3}, \dots, i_{n-2 \ n-1} = \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}}, \quad i_{n-1 \ n} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \quad (7.59)$$

Efectuând produsele termenilor din fiecare membru, rezultă:

$$i_{12} \cdot i_{23} \cdot \dots \cdot i_{n-2 \ n-1} \cdot i_{n-1 \ n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \dots \cdot \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{1n} \quad (7.60)$$

Deci:

$$i_{1n} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot \dots \cdot i_{n-2 \ n-1} \cdot i_{n-1 \ n} \quad (7.61)$$

*Raportul de transmitere total al unei transmisii cu "n" roți este produsul rapoartelor de transmitere intermediare.*

*Observații:*

- pentru transmiterea mișcării de rotație prin roți cu axe concurente, condiția de transmitere a mișcării constă în egalitatea vitezelor punctelor de contact aparținând celor două roți;
- dacă prin transmiterea mișcării, sensul de rotație al arborelui condus este același cu cel al arborelui motor, raportul de transmitere se consideră pozitiv iar dacă este de sens contrar se consideră negativ.

**Aplicații. 1.** Arborele motor I al unei transmisii prin fricțiune se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\omega_1$ , corespunzătoare unei turații a acestuia,  $n = 120/\pi \text{ rot/min}$ , în același timp alunecând axial în sensul săgeții după legea,  $x = 2t \text{ (cm)}$ . Roata de rază  $r = 6 \text{ cm}$  a arborelui orizontal I antrenează în mișcare, roata de rază  $R = 21 \text{ cm}$ , montată pe arborele vertical II (fig.7.8). Pentru o poziție curentă, să se determine viteza unghiulară  $\omega_2$  a arborelui II, precum și viteza și accelerația unui punct M, situat pe periferia roții montată pe acest arbore, la momentul  $t = 3 \text{ s}$ .

*Rezolvare.* Condiția de transmitere a mișcării constă în egalitatea vitezelor punctului de contact dintre cele două roți, exprimate din mișcarea fiecăreia.

$$v_A = \omega_1 r = \omega_2 x$$

$$\text{Cum: } \omega_1 = \frac{\pi \cdot n}{30}$$

Rezultă:

$$\omega_2 = \omega_2(t) = \omega_1 \frac{r}{x} = \frac{\pi \cdot n}{30} \cdot \frac{r}{x} = \frac{\pi \cdot 120}{30} \cdot \frac{6}{2t} = \frac{12}{t} \text{ s}^{-1}$$

Accelerația unghiulară corespunzătoare este:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2(t) = \dot{\omega}_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{12}{t} \right) = -\frac{12}{t^2} \text{ s}^{-2}$$

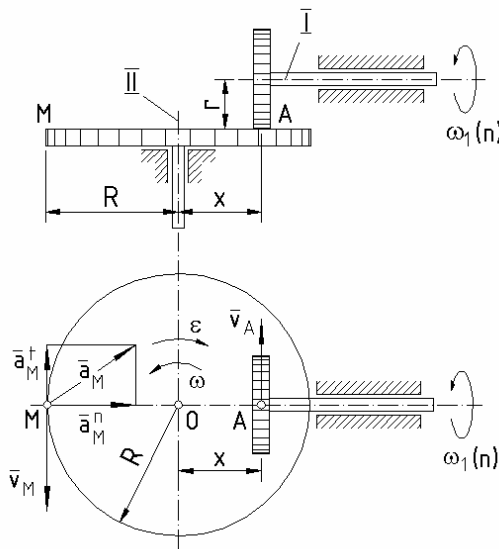


Fig. 7.8

Semnul minus indică faptul că accelerația unghiulară  $\varepsilon_2$  este de sens contrar vitezei unghiulare  $\omega_2$ .

Viteza punctului  $M$  la momentul  $t = 3s$  este:

$$v_M(3s) = \omega_2(3s) \cdot R = \frac{12}{3} \cdot 21 = 84 \text{ cm/s}$$

Accelerația punctului  $M$  la momentul  $t = 3s$  este:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^t + \bar{a}_M^n; a_M = \sqrt{(a_M^t)^2 + (a_M^n)^2}$$

unde:

$$\begin{cases} a_M^t(3s) = \varepsilon_2(3s) \cdot R = \frac{12}{9} \cdot 21 = 28 \text{ cm/s}^2 \\ a_M^n(3s) = \omega_2^2(3s) \cdot R = \frac{144}{9} \cdot 21 = 336 \text{ cm/s}^2 \end{cases}$$

$$a_M(3s) = \sqrt{28^2 + 336^2} = 337,16 \text{ cm/s}^2$$

**2.** O roată dințată cu diametrul  $d_1 = 360 \text{ mm}$  are o rotație  $n_1 = 100 \text{ rot/min}$ . Care este diametrul celei de-a doua roți,  $d_2$  care angrenează interior cu prima roată și are o rotație  $n_2 = 300 \text{ rot/min}$  (fig.7.9).

*Rezolvare.* Din condiția de transmitere a mișcării, viteza punctului de contact, dintre cele două roți în angrenare este:

$$v_A = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

cum:

$$\omega_i = \frac{\pi n_i}{30}; r_i = \frac{d_i}{2}; i = 1, 2$$

se va putea scrie:

$$\frac{\pi n_1}{30} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{\pi n_2}{30} \cdot \frac{d_2}{2}; n_1 d_1 = n_2 d_2$$

și:

$$d_2 = \frac{n_1 d_1}{n_2} = \frac{100 \cdot 360}{300} = 120 \text{ mm}$$

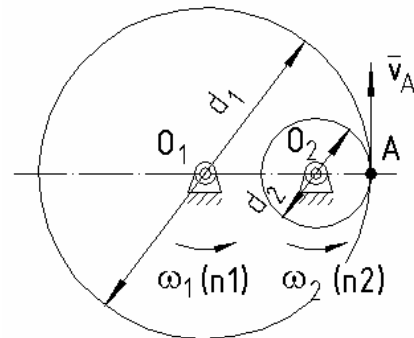


Fig. 7.9

### 7.2.3. MIȘCAREA PLAN PARALELĂ

*Un rigid efectuează o mișcare plan paralelă, când trei puncte necoliniare ale sale rămân tot timpul mișcării, conținute în același plan fix din spațiu.*

În cazul în care rigidul se reduce la o placă de grosime neglijabilă, care este conținută în planul fix, mișcarea se numește *plană*.

Pentru studiul mișcării se consideră un sistem de referință fix  $O_1 x_1 y_1 z_1$  și un sistem de referință mobil atașat rigidului  $Oxyz$ , cu axele  $O_1 z_1 \parallel Oz$  (fig.7.10.a). Planul  $Oxy$  conține planul mobil, definit de cele trei puncte necoliniare și obținut ca intersecție a rigidului cu planul fix  $O_1 x_1 y_1$ . Studiul mișcării rigidului poate fi redus la studiul mișcării planului mobil (fig.7.10.b).

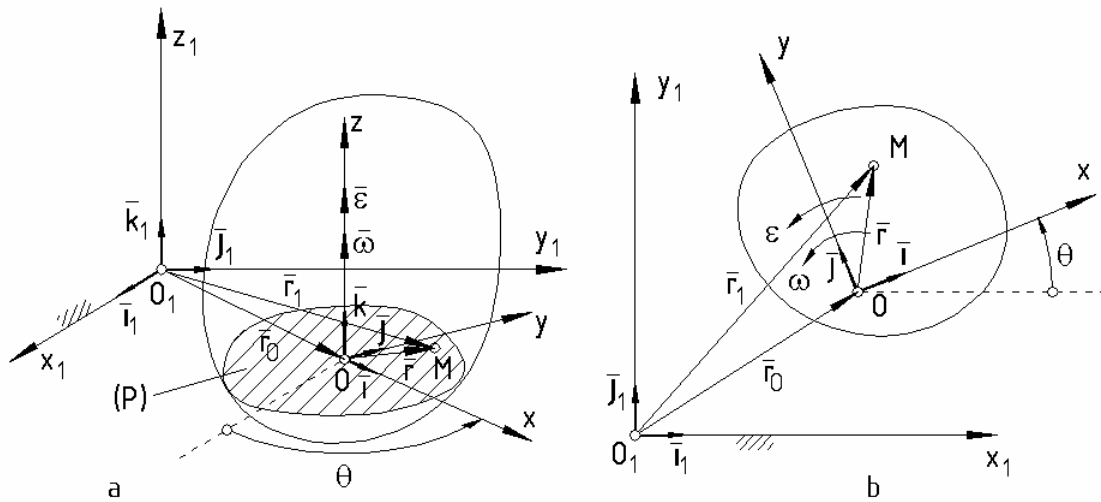


Fig.7.10

Poziția rigidului la un moment dat este determinată, de componentele vectorului de poziție  $\bar{r}_0(t)$ , ale originii sistemului de referință mobil, în raport cu cel fix,  $x_0(t), y_0(t)$  și de unghiul  $\theta(t)$ , determinat de axa  $Ox$  a sistemului mobil și axa  $O_1x_1$  a sistemului fix. Pentru stabilirea poziției rigidului la un moment dat sunt necesare trei funcții scalare de timp, deci *în mișcarea plan paralelă, un rigid are 3 grade de libertate*:  $x_0 = x_0(t)$ ;  $y_0 = y_0(t)$ ;  $\theta = \theta(t)$ .

Mișcarea plan paralelă se obține din mișcarea generală a rigidului în care sunt introduse următoarele simplificări impuse de această mișcare: vectorii  $\bar{v}_0$  și  $\bar{a}_0$  sunt conținuți în planul mișcării și  $O_1z_1 \parallel Oz$ .

$$\begin{cases} \bar{v}_0 = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} \\ \bar{a}_0 = a_{0x}\bar{i} + a_{0y}\bar{j} \end{cases} \quad (7.62)$$

$$\begin{cases} O_1z_1 \parallel Oz; \bar{k}_1 \parallel \bar{k}; \dot{\bar{k}}_1 = \dot{\bar{k}} = 0 \\ \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = \omega_y = 0; \dot{\bar{k}} \cdot \bar{j} = -\omega_x = 0; \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = \omega_z = \dot{\theta} \end{cases} \quad (7.63)$$

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \omega\bar{k} = \omega_z\bar{k} = \dot{\theta}\bar{k} \\ \bar{\varepsilon} = \varepsilon\bar{k} = \varepsilon_z\bar{k} = \ddot{\theta}\bar{k} \end{cases} \quad (7.64)$$

### 7.2.3.1. DISTRIBUȚIA DE VITEZE

#### *Studiul analitic*

Distribuția de viteze se stabilește pornind de la formula generală Euler (7.14) și ținând seama de particularitățile acestei mișcări date de relațiile (7.62) și (7.64) se obține:



$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (v_{0x} - \omega y)\bar{i} + (v_{0y} + \omega x)\bar{j} \quad (7.65)$$

Componentele vitezei pe axele triedrului mobil vor fi deci:

$$v_x = v_{0x} - \omega y; \quad v_y = v_{0y} + \omega x; \quad v_z = 0 \quad (7.66)$$

*Distribuția de viteze, specifică mișcării plan paralele poate fi considerată ca rezultând din compunerea unui câmp de viteze specific translației, cu un câmp de viteze specific rotației, în jurul unei axe perpendiculare pe planul în care s-ar efectua translația.*

#### Studiul vectorial

Se consideră două puncte  $M$  și  $N$  aparținând planului mobil  $Oxy$  (fig.7.11). Pentru a stabili o relație între vitezele celor două puncte se aplică relația (7.14) pentru exprimarea vitezelor acestora:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OM}, \quad \bar{v}_N = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{ON} \quad (7.67)$$

Scăzând membru cu membru se obține:

$$\bar{v}_N - \bar{v}_M = \bar{\omega} \times (\overline{ON} - \overline{OM}) \quad (7.68)$$

Cum  $\overline{ON} - \overline{OM} = \overline{MN}$  se deduce *relația Euler* pentru distribuția de viteze în mișcarea plan-paralelă:

$$\bar{v}_N = \bar{v}_M + \bar{\omega} \times \overline{MN} \quad (7.69)$$

sau:

$$\bar{v}_N = \bar{v}_M + \bar{v}_{NM} \quad (7.70)$$

unde  $\bar{v}_{NM} = \bar{\omega} \times \overline{MN}$  cu  $\bar{v}_{NM} \perp \overline{MN}$  (întrucât  $\bar{\omega} \perp \overline{MN}$ ) reprezintă viteza punctului  $N$  din mișcarea față de punctul  $M$ , ca și când acesta ar fi fix.

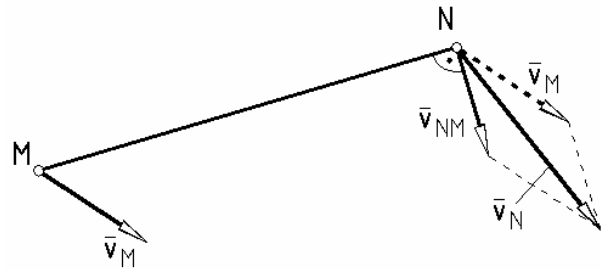


Fig. 7.11

#### 7.2.3.2. CENTRUL INSTANTANEU DE ROTAȚIE

În mișcarea plan paralelă există în permanență un punct aparținând planului mobil  $Oxy$ , a cărui viteză este nulă. Considerând punctul  $I(\xi, \eta)$ , a cărui viteză este nulă  $\bar{v}_I = 0$ , coordonatele acestui punct, notate cu  $\xi$  și  $\eta$ , se obțin anulând componentele vitezei exprimate cu relațiile (7.66):

$$\begin{cases} v_{0x} - \omega \eta = 0 \\ v_{0y} + \omega \xi = 0 \end{cases} \quad (7.69)$$

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}; \quad \eta = \frac{v_{0x}}{\omega} \quad (7.70)$$

Punctul  $I$  nu este fix, deoarece mărimile care definesc coordonatele  $\xi$  și  $\eta$ , respectiv,  $v_{0x}, v_{0y}, \omega$  sunt funcții de timp. Acest punct se numește *centrul instantaneu de rotație*.

Locul geometric al centrului instantaneu de rotație în raport cu sistemul mobil se numește *centroidă mobilă* sau *rostogolitoare*, iar în raport cu sistemul fix se numește *centroidă fixă*, sau *bază*.

Considerând ca origine a sistemului mobil, punctul  $I$ , viteza unui punct oarecare  $M$ , conform relației Euler se va scrie:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_I + \bar{\omega} \times \overline{IM} \quad (7.71)$$

cum  $\bar{v}_I = 0$ , rezultă:

$$\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \overline{IM} \quad (7.72)$$

*Formal, distribuția de viteze în mișcarea plan paralelă se determină ca o distribuție de viteze corespunzătoare unei mișcări de rotație, în jurul centrului instantaneu de rotație.*

#### *Determinarea centrului instantaneu de rotație*

1. Din câmpul de viteze al plăcii, se cunoaște viteza  $\bar{v}$  a unui punct  $M$  (fig.7.12). Centrul instantaneu de rotație este situat pe perpendiculara dusă din punctul  $M$ , pe suportul vitezei  $\bar{v}$ , de acea parte a vitezei pentru care sensurile vitezei unghiulare și ale vitezei punctului sunt corelate. Mărimea segmentului  $IM$  este dat de relația:

$$IM = \frac{v}{\omega}$$

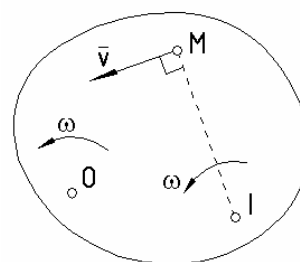


Fig. 7.12

2. Din câmpul de viteze, se cunosc direcțiile vitezelor a două puncte  $M_1$  și  $M_2$  aparținând plăcii. (fig.7.13) Centrul instantaneu de rotație se află la intersecția perpendicularelor duse din punctele  $M_1$  și  $M_2$  pe direcțiile vitezelor celor două puncte.

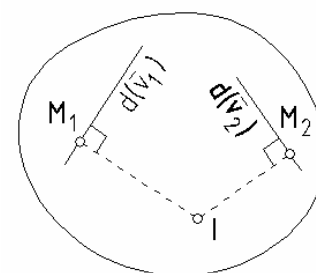


Fig. 7.13

3. Din câmpul de viteze, se cunosc vitezele a două puncte ale plăcii  $M_1$  și  $M_2$ , perpendiculare pe dreapta  $M_1M_2$ . Centrul instantaneu de rotație se află la

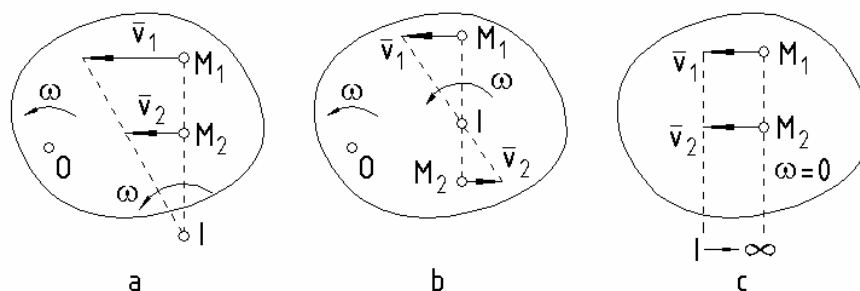


Fig. 7.14

intersecția dreptelor care trec prin originea și extremitatea vectorilor viteză ale celor două puncte (fig.7.14.a și fig.7.14.b). Dacă vitezele celor două puncte sunt egale, centrul instantaneu de rotație este la infinit, viteza unghiulară a plăcii este nulă, placa executând o mișcare de translație (fig.7.14.c).

4. Placa plană are o mișcare de rostogolire fără alunecare, pe o curbă din planul ei (fig.7.15). Centrul instantaneu de rotație este determinat de punctul de tangență  $I$ , al plăcii plane cu curba (singurul punct al plăcii plane de viteză nulă).

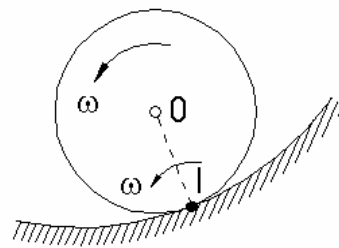


Fig. 7.15

### 7.2.3.3. DISTRIBUȚIA DE ACCELERAȚII

#### *Studiul analitic*

Utilizând relația Euler pentru accelerații (7.18) și ținând seama de particularitățile acestei mișcări, date de relațiile (7.62) și (7.64) obținem:

$$\bar{a} = a_{0x}\bar{i} + a_{0y}\bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} \quad (7.73)$$

din care rezultă componentele accelerației:

$$a_x = a_{0x} - y\varepsilon - x\omega^2; \quad a_y = a_{0y} + x\varepsilon - y\omega^2; \quad a_z = 0 \quad (7.74)$$

*Distribuția de accelerații, specifică mișcării plan paralele poate fi considerată ca rezultând din compunerea unui câmp de accelerații specific translației, cu un câmp de accelerații specific rotației, în jurul unei axe perpendiculare pe planul în care s-ar efectua translația.*

#### *Studiul vectorial*

Se consideră două puncte  $M$  și  $N$  aparținând planului mobil  $Oxy$  (fig.7.16). Pentru a exprima accelerația punctului  $N$  -  $\bar{a}_N$  în funcție de accelerația punctului  $M$  -  $\bar{a}_M$ , cunoscută, se vor scrie accelerațiile celor două puncte cu relația (7.18) care poate fi pusă și sub forma:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \\ &= \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + [(\bar{\omega} \cdot \bar{r})\bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}] = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r} \end{aligned} \quad (7.75)$$

întrucât:  $\bar{\omega} \perp \bar{r} \Rightarrow \bar{\omega} \cdot \bar{r} = 0$

Astfel:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OM} - \omega^2 \overline{OM}, \quad \bar{a}_N = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{ON} - \omega^2 \overline{ON} \quad (7.76)$$

Scăzând membru cu membru, relațiile (7.76) rezultă:

$$\bar{a}_N - \bar{a}_M = \bar{\varepsilon} \times (\overline{ON} - \overline{OM}) - \omega^2 (\overline{ON} - \overline{OM}) \quad (7.77)$$

Cum  $\overline{ON} - \overline{OM} = \overline{MN}$  se deduce *relația Euler* pentru distribuția de accelerații în mișcarea plan-paralelă:

$$\bar{a}_N = \bar{a}_M + \bar{\varepsilon} \times \overline{MN} - \omega^2 \overline{MN} \quad (7.78)$$

sau:

$$\bar{a}_N = \bar{a}_M + \bar{a}_{NM}^t + \bar{a}_{NM}^n \quad (7.79)$$

unde  $-\bar{a}_{NM}^t = \bar{\varepsilon} \times \overline{MN}$  cu  $\bar{a}_{NM}^t \perp \overline{MN}$

(întrucât  $\bar{\varepsilon} \perp \overline{MN}$ ) este accelerația tangențială a punctului  $N$  din mișcarea față de punctul  $M$ , ca și când acesta ar fi fix și  $\bar{a}_{NM}^n = -\omega^2 \overline{MN}$  este accelerația normală a punctului  $N$  din mișcarea față de punctul  $M$ , ca și când acesta ar fi fix.

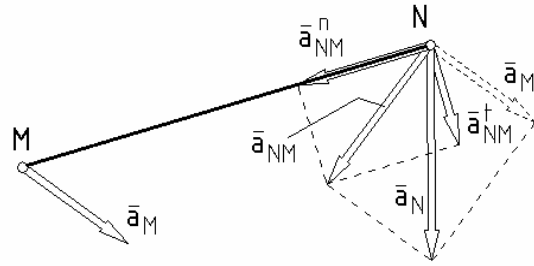


Fig. 7.16

#### 7.2.3.4. POLUL ACCELERAȚIILOR

Specific câmpului de accelerații, ca și câmpului de viteze, în mișcarea plan paralelă există în permanență un punct aparținând planului mobil  $Oxy$ , a cărei accelerație este nulă. Considerând punctul  $J(\xi', \eta')$ , a cărei accelerație este nulă  $\bar{a}_J = 0$ , coordonatele acestui punct, notate cu  $\xi'$  și  $\eta'$ , sunt funcții de timp și se obțin anulând componentele accelerației exprimate cu relațiile (7.74).

$$\begin{cases} a_{0x} - \eta' \varepsilon - \xi' \omega^2 = 0 \\ a_{0y} + \xi' \varepsilon - \eta' \omega^2 = 0 \end{cases} \quad (7.80)$$

$$\xi' = \frac{-a_{0y} \varepsilon + a_{0x} \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}; \eta' = \frac{a_{0x} \varepsilon + a_{0y} \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (7.81)$$

Punctul  $J$  din planul  $Oxy$ , de coordonate  $\xi'$  și  $\eta'$ , este *polul accelerațiilor*.

Considerând ca origine a sistemului mobil, punctul  $J$ , accelerația unui punct oarecare  $M$ , conform relației Euler scrisă sub forma (7.79) este:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_J + \bar{\varepsilon} \times \overline{JM} - \omega^2 \overline{JM} \quad (7.82)$$

cum  $\bar{a}_J = 0$ , rezultă:

$$\bar{a}_M = \bar{\varepsilon} \times \overline{JM} - \omega^2 \overline{JM} \quad (7.83)$$

*Formal, distribuția de accelerații în mișcarea plan paralelă se determină ca o distribuție de accelerații corespunzătoare unei mișcări de rotație, în jurul polului accelerațiilor.*

Polul accelerațiilor  $J(\xi', \eta')$  și centrul instantaneu de rotație  $I(\xi, \eta)$ , sunt în general, două puncte diferite.

**Aplicații. 1.** Se consideră mecanismul bielă manivelă din figura 7.17, unde manivela  $OA = 2R$  se rotește cu viteză unghiulară  $\omega_1$  și antrenează în mișcare biela  $AB = 2R$ . Să se determine vitezele punctelor  $B$  și  $M$  (punctul  $M$  este situat pe mijlocul bielei  $AB$ ).

*Rezolvare.* Legea de mișcare a manivelei  $OA$  este dată de unghiul  $\varphi$ :

$$\varphi = \varphi(t) = \omega_1 t$$

Viteza punctului  $A$ , aparținând manivelei  $OA$ , în mișcare de rotație este:

$$v_A = 2\omega_1 R$$

Punctul  $A$ , aparține și bielei  $AB$ , în mișcare plan paralelă. Viteza punctului  $A$ , poate fi exprimată și din mișcarea bielei  $AB$ , ca o rotație în jurul centrului instantaneu  $I$ , obținut ca intersecție a perpendicularelor duse din  $A$  și  $B$ , pe suporturile vitezelor acestor puncte, ale căror direcții sunt cunoscute. Poate fi scrisă relația:

$$v_A = \omega_2 \cdot IA$$

Din cele două relații rezultă viteza unghiulară instantanee  $\omega_2$  a bielei  $AB$ .

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{2R}{IA}$$

Lungimea segmentului  $IA$ , rezultă din triunghiul isoscel  $IAB$ , cu unghiul la vârf  $2\varphi$  - unghi exterior triunghiului isoscel  $OAB$  - și unghiurile de la bază  $\hat{B} = \hat{I} = 90^\circ - \varphi$ . Rezultă  $IA = AB = 2R$ :

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{2R}{2R} = \omega_1$$

Din  $\triangle OBI$ , lungimea segmentului  $IB$  este  $IB = OI \cdot \sin \varphi = 4R \sin \varphi = 4R \sin \omega_1 t$  iar viteza punctului  $B$ :

$$v_B = \omega_2 \cdot IB = 4R\omega_1 \sin \omega_1 t$$

Lungimea segmentului  $IM$  se obține aplicând teorema Pitagora generalizată în triunghiul  $IAM$ :

$$IM = \sqrt{IA^2 + MA^2 - 2IA \cdot MA \cdot \cos 2\varphi} = \sqrt{4R^2 + R^2 - 2 \cdot 2R \cdot R \cos 2\omega_1 t} = R\sqrt{5 - 4\cos 2\omega_1 t}$$

Viteza punctului  $M$  va fi:

$$v_M = \omega_1 R \sqrt{5 - 4\cos 2\omega_1 t}$$

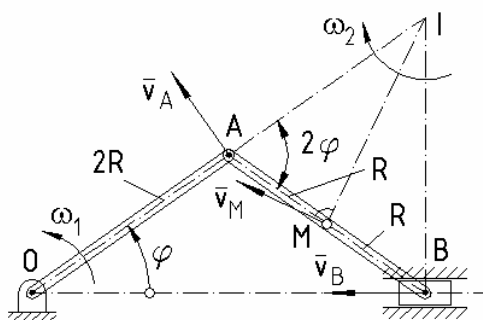


Fig. 7.17

**2.** Roata unui automobil de rază  $R$  se rostogolește fără alunecare pe un drum orizontal, automobilul deplasându-se cu viteza  $v_0$  (fig.7.18). Să se determine viteza unui punct  $M$ , situat pe periferia roții, care formează cu verticala, unghiul la centru,  $\varphi$  și să se particularizeze pentru  $\varphi = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ .

*Rezolvare.* Roata fiind în mișcare plan paralelă, centrul instantaneu de rotație  $I$  se situează în punctul de contact dintre roată și drum.

Automobilul, deci și axul  $O$  al roții având viteza  $v_0$ , poate fi scrisă relația:

$$v_0 = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{R}$$

S-a obținut viteza unghiulară instantanee a roții, cu ajutorul căreia poate fi determinată viteza oricărui punct situat pe periferia roții.

$$v_M = \omega \cdot IM = \frac{v_0}{R} 2R \sin \frac{\varphi}{2} = 2v_0 \sin \frac{\varphi}{2}$$

Vitezele punctelor situate pe periferia roții se obțin prin particularizarea unghiului  $\varphi$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{2}; v_B = 2v_0 \sin \frac{\pi}{4} = 2v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}v_0 \\ \varphi = \pi; v_A = 2v_0 \sin \frac{2\pi}{4} = 2v_0 \cdot 1 = 2v_0 \\ \varphi = \frac{3\pi}{2}; v_C = 2v_0 \sin \frac{3\pi}{4} = 2v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}v_0 \end{array} \right.$$

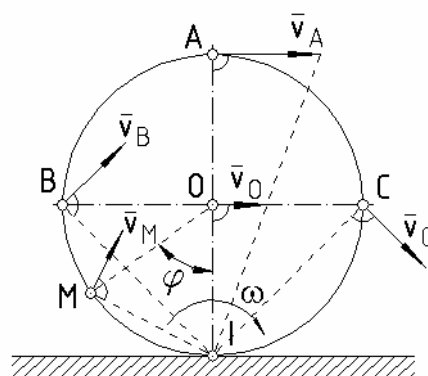


Fig. 7.18

Vitezele punctelor  $A$ ,  $B$  și  $C$  pot fi scrise și direct din mișcarea roții în jurul centrului instantaneu de rotație  $I$ :  $v_B = \omega \cdot IB$ ,  $v_A = \omega \cdot IA$ ,  $v_C = \omega \cdot IC$

**3.** Manivela  $OA$  se rotește cu viteza unghiulară  $\omega_0$  în jurul axului  $O$  și antrenează în mișcare, roata de rază  $r$  care angrenează interior cu roata dințată fixă de rază  $R$ . Să se determine vitezele punctelor  $B$ ,  $C$  și  $D$ , situate pe periferia roții de rază  $r$  (fig.7.19).

*Rezolvare.* Manivela  $OA$ , în mișcare de rotație antrenează roata de rază  $r$ , într-o mișcare plan paralelă cu centrul instantaneu de rotație în punctul de tangență cu roata fixă de rază  $R$ . Viteza unghiulară instantanee  $\omega_1$  a roții de rază  $r$  va rezulta din condiția ca viteza punctului  $A$ , care aparține atât manivelei  $OA$  cât și roții de rază  $r$ , să fie unică.

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_1 \cdot IA$$

$$\omega_0(R - r) = \omega_1 r$$

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{R - r}{r} = \omega_0 \left( \frac{R}{r} - 1 \right)$$

Vitezele punctelor  $B$ ,  $C$  și  $D$  sunt:

$$v_B = \omega_1 \cdot IB = \omega_0 \left( \frac{R}{r} - 1 \right) \cdot \sqrt{2}r = \sqrt{2}\omega_0 r \left( \frac{R}{r} - 1 \right)$$

$$v_C = \omega_1 \cdot IC = \omega_0 \left( \frac{R}{r} - 1 \right) \cdot 2r = 2\omega_0 r \left( \frac{R}{r} - 1 \right)$$

$$v_D = \omega_1 \cdot ID = \omega_0 \left( \frac{R}{r} - 1 \right) \cdot \sqrt{2}r = \sqrt{2}\omega_0 r \left( \frac{R}{r} - 1 \right)$$

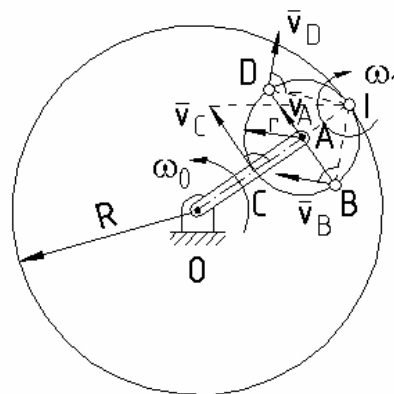


Fig. 7.19

**4.** Manivela  $OA$  se rotește cu viteza unghiulară  $\omega_0 = 0,5 s^{-1}$  și pune în mișcare roata de rază  $r_2 = 20 cm$ . Roata de rază  $r_2$  se rostogolește fără alunecare pe roata fixă de rază  $r_1 = 10 cm$  și antrenează în mișcare biela  $BC$  de lungime  $l = 100 cm$ . Pentru poziția indicată în figura 7.20 să se determine vitezele punctelor  $B$  și  $C$ .

*Rezolvare.* Roata de rază  $r_2$  are o mișcare plan paralelă, centrul instantaneu de rotație  $I_1$  situându-se în punctul de contact dintre cele două roți. Viteza unghiulară instantanee a roții de rază  $r_2$ ,  $\omega_1$  se determină din expresia vitezei punctului  $A$ , care aparține atât manivelei  $OA$  în mișcare de rotație cât și roții de rază  $r_2$ , în mișcare plan paralelă.

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 \cdot I_1 A \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 \frac{OA}{I_1 A} = \omega_0 \frac{r_1 + r_2}{r_2}$$

Viteza punctului  $B$ , perpendiculară pe raza la centru instantaneu de rotație  $I_1$ , corelată cu sensul vitezei unghiulare  $\omega_1$  are mărimea:

$$\begin{aligned} v_B &= \omega_1 \cdot I_1 B = \omega_0 \frac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot \sqrt{2} r_2 = \\ &= \sqrt{2} \omega_0 (r_1 + r_2) = \sqrt{2} \cdot 0,5(10 + 20) = 21,2 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

În același timp, punctul  $B$  aparține și bielei  $BC$ , în mișcare plan paralelă, cu centrul instantaneu de rotație  $I_2$ , obținut ca intersecție a perpendicularelor duse din punctele  $B$  și  $C$  pe direcțiile vitezelor acestora, care sunt cunoscute.

$$\begin{aligned} v_B &= \omega_2 \cdot I_2 B \\ I_2 B &= \frac{BB'}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{l^2 - r_2^2} \end{aligned}$$

$$v_B = \sqrt{2} \omega_2 \sqrt{l^2 - r_2^2}$$

Deci:

$$\omega_1 \cdot I_1 B = \omega_2 \cdot I_2 B$$

$$\sqrt{2} \omega_0 (r_1 + r_2) = \sqrt{2} \omega_2 \sqrt{l^2 - r_2^2}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{l^2 - r_2^2}}$$

Viteza punctului  $C$  este:

$$v_C = \omega_2 \cdot I_2 C$$

$$I_2 C = I_2 B' + B' C = \sqrt{l^2 - r_2^2} + r_2$$

$$v_C = \omega_0 (r_1 + r_2) \frac{\sqrt{l^2 - r_2^2} + r_2}{\sqrt{l^2 - r_2^2}} = 0,5(10 + 20) \frac{\sqrt{100^2 - 20^2} + 20}{\sqrt{100^2 - 20^2}} = 18 \text{ cm/s}$$

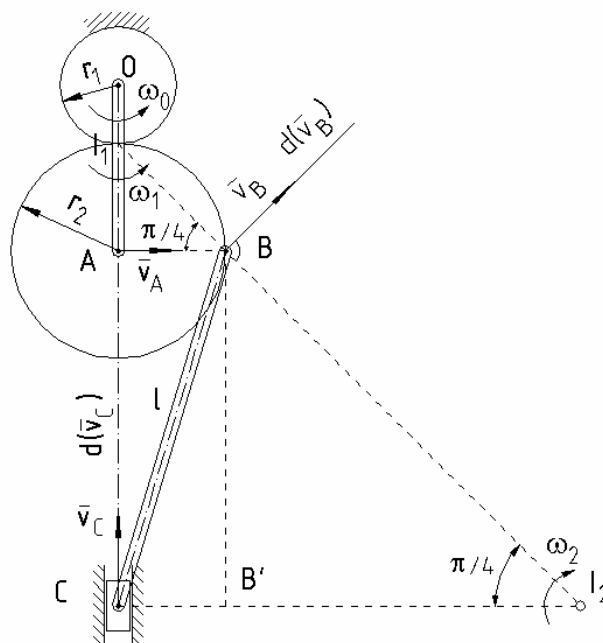


Fig. 7.20

**5.** Manivela  $AB$  se rotește cu viteză unghiulară constantă  $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$ . Pentru poziția și dimensiunile mecanismului din figura 7.21 să se determine viteza și accelerația punctului  $C$ .

*Rezolvare.* Pentru determinarea vitezei și accelerației punctului  $C$ , se va utiliza metoda analitică respectiv, relațiile Euler. Atât sistemele de coordonate fixe cât și cel mobil se consideră cu axa absciselor orizontală, orientată spre dreapta iar cea a ordonatelor, verticală în sus. Originile sistemelor de axe vor fi  $A$  și  $D$  pentru sistemele fixe iar  $B$  pentru sistemul mobil.

*a. Distribuția de viteze.* Viteza punctului  $B$  se obține utilizând distribuția de viteze din mișcarea de rotație a manivelei  $AB$ .

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_1 \times \vec{AB} = 10\vec{k} \times 4\vec{i} = 40\vec{j} \text{ (cm/s)}$$

Pentru calculul vitezei punctului  $C$  trebuie determinată viteza unghiulară instantanee a bielei  $BC$ , în mișcare plan paralelă. Ținând seama că punctul  $C$  aparține atât bielei  $BC$  cât și

manivelei  $DC$ , în mișcare de rotație, viteza unghiulară instantanee va rezulta din ecuațiile care exprimă viteza punctului  $C$ , din mișcarea bieiei  $BC$  și a manivelei  $DC$ . Vitezele unghiulare ale bieiei  $BC$ ,  $\omega_2$  și manivelei  $DC$ ,  $\omega_3$  se consideră pozitive, adică în sensul versorului  $\bar{k}$ , respectiv în sens antiorar în plan.

$$\begin{cases} \bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \overline{BC}; & C \in BC \\ \bar{v}_C = \bar{\omega}_3 \times \overline{DC}; & C \in DC \end{cases}$$

$$\bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \overline{BC} = \bar{\omega}_3 \times \overline{DC}$$

$$40\bar{j} + \omega_2\bar{k} \times (6\bar{i} + 6\bar{j}) = \omega_3\bar{k} \times 10\bar{j}$$

$$-6\omega_2\bar{i} + (40 + 6\omega_2)\bar{j} = -10\omega_3\bar{i}$$

Proiectând ecuația vectorială pe axele de versori  $\bar{i}$  și  $\bar{j}$  se obține:

$$\begin{cases} 6\omega_2 = 10\omega_3 \\ 40 + 6\omega_2 = 0 \end{cases}$$

Rezultă vitezele unghiulare:

$$\omega_2 = -\frac{20}{3}s^{-1}; \quad \omega_3 = -4s^{-1}$$

Semnul (-) indică faptul că vitezele unghiulare au sensul contrar celui presupus inițial, adică sensul orar.

Viteza punctului  $C$  este:

$$\bar{v}_C = -4\bar{k} \times 10\bar{j} = 40\bar{i} \text{ (cm/s)}$$

*b. Distribuția de accelerații.* Accelerația punctului  $B$  se obține utilizând distribuția de accelerații din mișcarea de rotație a manivelei  $AB$ , cu observația că dacă  $\omega_1 = ct.$ ,  $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 0$ .

$$\bar{a}_B = -\omega_1^2 \cdot \overline{AB} = -100 \cdot 4\bar{i} = -400\bar{i} \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

La fel ca la distribuția de viteze, pentru determinarea accelerației unghiulare a bieiei  $BC$  se va scrie accelerația punctului  $C$ , din mișcarea celor două elemente de care aparține: biela  $BC$  și manivela  $DC$ .

$$\begin{cases} \bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{BC} - \omega_2^2 \cdot \overline{BC}; & C \in BC \\ \bar{a}_C = \bar{\varepsilon}_3 \times \overline{DC} - \omega_3^2 \cdot \overline{DC}; & C \in DC \end{cases}$$

$$\bar{a}_B + \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{BC} - \omega_2^2 \cdot \overline{BC} = \bar{\varepsilon}_3 \times \overline{DC} - \omega_3^2 \cdot \overline{DC}$$

$$-400\bar{i} + \varepsilon_2\bar{k} \times (6\bar{i} + 6\bar{j}) - \frac{400}{9}(6\bar{i} + 6\bar{j}) = \varepsilon_3\bar{k} \times 10\bar{j} - 16 \cdot 10\bar{j}$$

$$-(6\varepsilon_2 + \frac{2000}{3})\bar{i} + (6\varepsilon_2 - \frac{800}{3})\bar{j} = -10\varepsilon_3\bar{i} - 160\bar{j}$$

Proiectând ecuația vectorială pe axele de versori  $\bar{i}$  și  $\bar{j}$  se obține sistemul:

$$\begin{cases} -6\varepsilon_2 - \frac{2000}{3} = -10\varepsilon_3 \\ 6\varepsilon_2 - \frac{800}{3} = -160 \end{cases}$$

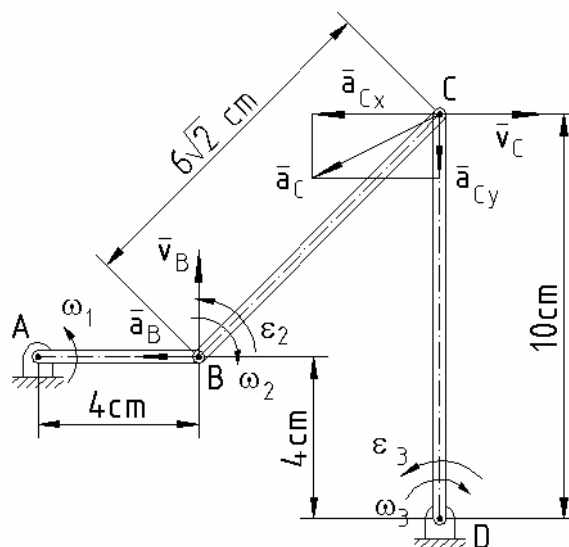


Fig. 7.21



Rezultă accelerațiile unghiulare:

$$\varepsilon_2 = \frac{160}{9} s^{-2}; \quad \varepsilon_3 = \frac{232}{3} s^{-2}$$

Accelerația punctului  $C$  este:

$$\begin{aligned} \bar{a}_c &= \frac{232}{3} \bar{k} \times 10 \bar{j} - 16 \cdot 10 \bar{j} = -\frac{2320}{3} \bar{i} - 160 \bar{j} \\ |a_c| &= \sqrt{\frac{2320^2}{9} + 160^2} = 789,7 \text{ cm/s}^2 \end{aligned}$$

### 7.3 MIȘCAREA RELATIVĂ A PUNCTULUI

#### 7.3.1 DERIVATA ABSOLUTĂ ȘI RELATIVĂ A UNUI VECTOR

Se consideră sistemul de referință fix  $O_1x_1y_1z_1$ , de versori  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$  și sistemul de referință mobil  $Oxyz$ , de versori  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  precum și un vector  $\bar{V} = \bar{V}(t)$  care poate fi scris prin proiecții pe cele două sisteme de axe, astfel:

$$V_{x_1} \bar{i}_1 + V_{y_1} \bar{j}_1 + V_{z_1} \bar{k}_1 = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} \quad (7.84)$$

Derivând în raport cu timpul, relația (7.84), obținem:

$$\dot{V}_{x_1} \bar{i}_1 + \dot{V}_{y_1} \bar{j}_1 + \dot{V}_{z_1} \bar{k}_1 = (\dot{V}_x \bar{i} + \dot{V}_y \bar{j} + \dot{V}_z \bar{k}) + (V_x \dot{\bar{i}} + V_y \dot{\bar{j}} + V_z \dot{\bar{k}}) \quad (7.85)$$

Termenul din membrul stâng al egalității (7.85) reprezintă derivata în raport cu timpul a vectorului  $\bar{V}$ , exprimat prin proiecții pe axele sistemului de referință fix și se numește *derivată absolută*:

$$\dot{V}_{x_1} \bar{i}_1 + \dot{V}_{y_1} \bar{j}_1 + \dot{V}_{z_1} \bar{k}_1 = \dot{\bar{V}} = \frac{d\bar{V}}{dt} \quad (7.86)$$

Prima paranteză din membrul drept reprezintă derivata în raport cu timpul a vectorului  $\bar{V}$ , exprimat prin proiecții pe axele sistemului de referință mobil, ca și când acesta ar fi fix (versorii  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  nu-și modifică direcția) și se numește *derivată locală* sau *derivată relativă*:

$$\dot{V}_x \bar{i} + \dot{V}_y \bar{j} + \dot{V}_z \bar{k} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \quad (7.87)$$

Introducând relațiile Poisson (7.12) în paranteza a doua din membrul drept al relației (7.85), rezultă:

$$\begin{aligned} V_x \dot{\bar{i}} + V_y \dot{\bar{j}} + V_z \dot{\bar{k}} &= V_x (\bar{\omega} \times \bar{i}) + V_y (\bar{\omega} \times \bar{j}) + V_z (\bar{\omega} \times \bar{k}) = \\ &= \bar{\omega} \times (V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{V} \end{aligned} \quad (7.88)$$

Ținând seama de relațiile (7.86), (7.87) și (7.88), relația (7.85) devine:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{V} \quad (7.89)$$

și exprimă derivata absolută a unui vector definit prin proiecțiile sale pe axele triedrului mobil.

### 7.3.2. DEFINIREA MIȘCĂRILOR

Se consideră un sistem de referință fix  $O_1x_1y_1z_1$ , de versori  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$  și un sistem de referință mobil  $Oxyz$ , de versori  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ . Poziția unui punct  $M$  în raport cu triedrul fix este definită de vectorul de poziție  $\bar{r}_1$ , în raport cu triedrul mobil, de vectorul de poziție  $\bar{r}$ , poziția triedrului mobil în raport cu triedrul fix fiind definită de vectorul de poziție  $\bar{r}_0$  (fig.7.22).

*Mișcarea absolută* este mișcarea punctului în raport cu reperul fix.

*Mișcarea relativă* este mișcarea punctului în raport cu reperul mobil.

*Mișcarea de transport* este mișcarea punctului solidar cu reperul mobil, din mișcarea acestuia în raport cu triedrul fix. Sistemul de referință mobil se mai numește și *transportor*.

Vitezele și accelerațiile punctului din mișcările definite mai sus se numesc: *viteză absolută*, *viteză relativă* și *viteză de transport*, respectiv, *accelerație absolută*, *accelerație relativă* și *accelerație de transport*.

Viteza și accelerația de transport sunt date de relațiile (7.14) și (7.18), cunoscute din studiul mișcării rigidului:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}; \quad \bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (7.90)$$

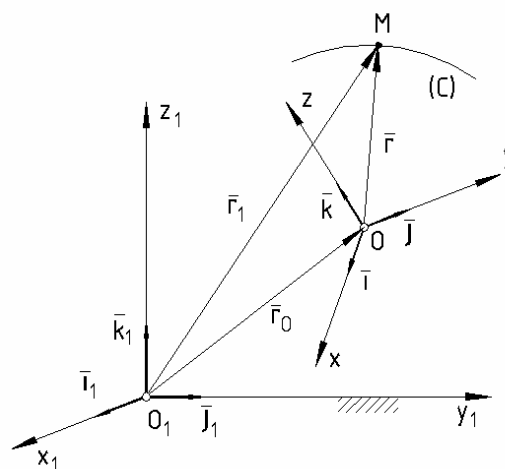


Fig.7.22

### 7.3.3. COMPUNERA VITEZELOR

Relația dintre vectorii ce exprimă poziția punctului  $M$ , în raport cu cele două sisteme de referință este:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r} \quad (7.91)$$

Derivând această relație în raport cu timpul, obținem:

$$\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{r}} \quad (7.92)$$

Având în vedere că  $\dot{\bar{r}}_0 = \bar{v}_0$  reprezintă viteza originii triedrului mobil din mișcarea față de triedrul fix și că vectorul  $\bar{r}$  este definit prin proiecțiile sale pe axele triedrului mobil, deci i se aplică regula de derivare (7.89), se obține:

$$\dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}_0 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (7.93)$$

unde:

- $\dot{\vec{r}}_I = \vec{v}_a$  reprezintă viteza punctului  $M$ , în raport cu triedrul fix și se numește *viteză absolută*;
- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{v}_r$  reprezintă viteza punctului  $M$ , în raport cu triedrul mobil și se numește *viteză relativă*;
- $\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_t$  reprezintă viteza punctului  $M$ , solidar cu triedrul mobil (transportorul), din mișcarea acestuia în raport cu triedrul fix și se numește *viteză de transport*.

Cu aceste notații, relația (7.93) devine:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t \quad (7.94)$$

*Viteza absolută a unui punct este suma vectorială dintre viteza relativă și viteza de transport a punctului.*

### 7.3.4. COMPUNEREA ACCELERAȚIILOR

Derivând în raport cu timpul, relația (7.93) și având în vedere că  $\dot{\vec{v}}_0 = \vec{a}_0$  reprezintă accelerația originii triedrului mobil din mișcarea față de triedrul fix,  $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$ , vectorii  $\vec{r}$  și  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$  sunt definiți prin componentele lor pe axele triedrului mobil, deci li se aplică regula de derivare (7.89), se obține:

$$\ddot{\vec{r}}_I = \vec{a}_0 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right)$$

Grupând convenabil termenii se poate scrie:

$$\ddot{\vec{r}}_I = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + [\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] + 2\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (7.95)$$

- $\ddot{\vec{r}}_I = \vec{a}_a$  reprezintă accelerația punctului  $M$ , în raport cu triedrul fix și se numește *accelerație absolută*;
- $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{a}_r$  reprezintă viteza punctului  $M$ , în raport cu triedrul mobil și se numește *accelerație relativă*;
- $\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_t$  reprezintă accelerația punctului  $M$ , solidar cu triedrul mobil (transportorul), din mișcarea acestuia în raport cu triedrul fix și se numește *accelerație de transport*;
- $2\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \vec{a}_c$  reprezintă o accelerație ce nu aparține vreunei mișcări; exprimă influența simultană a mișcării de rotație a sistemului mobil și a mișcării relative a punctului asupra accelerației absolute; se numește *accelerație complementară sau accelerație Coriolis*.

Cu aceste notații, relația (7.95) devine:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \quad (7.96)$$

*Accelerația absolută a unui punct este suma vectorială dintre accelerația relativă, accelerația de transport și accelerația Coriolis a punctului.*

*Observație:* Conform definiției, accelerația Coriolis este produsul vectorial al vectorilor  $\bar{\omega}$  și  $\bar{v}_r$ :

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \quad (7.97)$$

Această accelerație devine nulă, când:

- $\bar{\omega} = 0$ , adică triedrul mobil execută o mișcare de translație în raport cu triedrul fix;
- $\bar{v}_r \parallel \bar{\omega}$ , vectorul  $\bar{v}_r$  rămâne în permanență paralel cu vectorul  $\bar{\omega}$ .

**Aplicație:** Un cadru dreptunghiular  $ABCDEO$ , unde  $BC=ED=R$  se rotește în jurul axei verticale  $OA$  cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ , generând un cilindru (fig.7.23). Pe latura  $CD$  alunecă un cursor  $M$  cu accelerația  $g$ . Să se determine la un moment  $t$ , viteza și accelerația absolută a cursorului.

*Rezolvare:* Sistemul fix este reprezentat prin lagărele  $O$  și  $A$ , sistemul mobil fiind cadrul care efectuează o mișcare de rotație în jurul axe  $OA$ . Mișcarea relativă este o mișcare rectilinie a cursorului  $M$  pe latura cadrului,  $CD$ . Mișcarea de transport este efectuată de cursorul  $M$ , imobilizat pe cadru, adică o mișcare circulară de rază  $R$  și vitează unghiulară  $\omega$ . Mișcarea absolută este mișcarea cursorului  $M$ , față de lagăre.

*Studiul vitezelor*

Viteza relativă este:  $v_r = gt$  și are direcția laturii  $CD$ .

Viteza de transport este:  $v_t = \omega R$ , fiind tangentă la cercul descris de cursorul  $M$  imobilizat de cadru, din mișcarea acestuia față de lagăre, deci într-un plan perpendicular pe latura  $CD$ .

Viteza absolută este dată de relația (7.94):

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

Modul vitezei absolute este:

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + g^2 t^2}$$

întrucât cei doi vectori sunt perpendiculari.

*Studiul accelerațiilor*

Accelerația relativă este:  $a_r = g$

Accelerația de transport este accelerația din mișcarea cursorului pe cercul de rază  $R$  cu viteza unghiulară constantă:  $a_t = a_t^n = \omega^2 R$  fiind situată pe raza la axa de rotație, deci paralelă cu direcțiile  $BC$  și  $ED$ .

Accelerația Coriolis, conform (7.97) este:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 0; \bar{\omega} \parallel \bar{v}_r$$

Accelerația absolută este:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = \bar{a}_r + \bar{a}_t^n$$

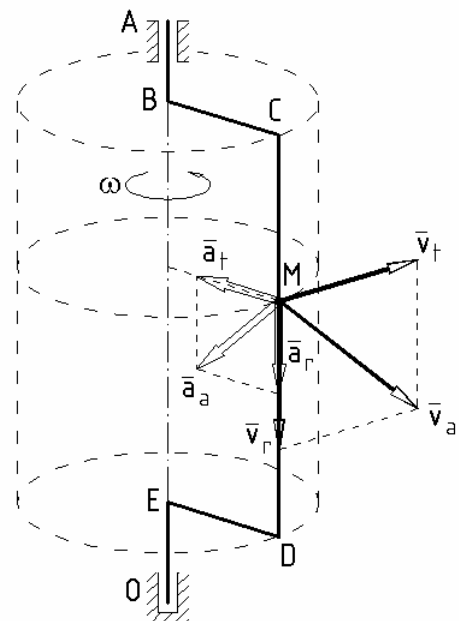


Fig. 7.23

Modulul accelerației absolute este:

$$|\vec{a}_a| = \sqrt{a_r^2 + (a_t^n)^2} = \sqrt{g^2 + \omega^4 R^2}$$

cei doi vectori fiind perpendiculari.

### TEST DE EVALUARE

- În mișcarea generală a rigidului, vectorii  $\vec{\omega}$  și  $\vec{\varepsilon}$  reprezintă:
  - viteza și accelerația unghiulară
  - vectori oarecari
  - definire concretă, în mișcările particulare ale rigidului
- Un rigid execută o mișcare de rotație dacă:
  - două puncte ale rigidului rămân fixe în timpul mișcării
  - o dreaptă a acestuia (axa de rotație) rămâne fixă în timpul mișcării
  - punctele execută traiectorii situate în plane perpendiculare pe axa de rotație
- Distribuția de accelerații, în mișcarea de rotație este:
  - $\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
  - $\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) \times \vec{r}$
  - $\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \cdot \vec{r}$
- Un corp execută o mișcare plan paralelă dacă:
  - un plan al acestuia rămâne paralel cu același plan fix din spațiu
  - trei puncte necoliniare ale rigidului sunt conținute în același plan fix din spațiu
  - axa instantanee de rotație rămâne normală la același plan fix din spațiu
- Legea mișcării plan paralele este definită de relația:
  - $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t), \theta = \theta(t)$
  - $x_0 = x_0(t), y_0 = y_0(t), \theta = \theta(t)$
  - nici una din variantele  $a$  și  $b$
- Centrul instantaneu de rotație reprezintă:
  - un punct cu viteză nulă
  - un punct cu viteză și accelerație nulă
  - un punct în jurul căruia corpul execută o mișcare de rotație
- Distribuția de accelerații, în mișcarea plan paralelă are expresia:
  - $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
  - $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \cdot \vec{r}$
  - $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) \times \vec{r}$
- Accelerația absolută în mișcarea unui punct este:
  - $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t$
  - $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c$
  - $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + 2\vec{\omega}_t \times \vec{v}_r$
- Expresia accelerației Coriolis este:
  - $\vec{a}_c = \vec{\omega}_t \times \vec{v}_r$
  - $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_t \times \vec{v}_r$
  - $a_c = 2\vec{\omega}_t \cdot \vec{v}_r$

# DINAMICA

## 8.1. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL ÎN MIȘCARE ABSOLUTĂ

### 8.1.1. NOȚIUNI FUNDAMENTALE

#### 8.1.1.1. LUCRUL MECANIC

Prin definiție, lucrul mecanic efectuat de forța  $\vec{F}$  la deplasarea punctului material din poziția  $M_0$ , în poziția  $M_1$  este dat de integrala curbilinie:

$$L_{M_0 M_1} = \int_{M_0 M_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (8.1)$$

unde  $d\vec{r}$  este deplasarea efectuată de punctul de aplicație al forței  $\vec{F}$  în timpul elementar  $dt$  (fig.8.1).

Pentru o forță constantă și o deplasare rectilinie a punctului material, lucrul mecanic este:

$$L_{M_0 M_1} = \vec{F} \cdot \vec{r} \quad (8.2)$$

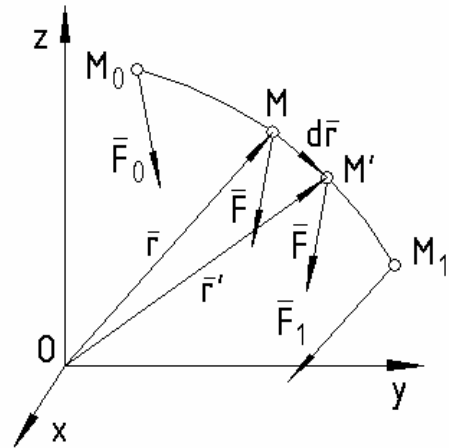


Fig. 8.1

Forța  $\vec{F}$  este în general o funcție de timpul  $t$ , poziția  $\vec{r}$  și viteza  $\vec{v}$  a punctului de aplicație. Deplasarea  $M_0 M_1$ , efectuată pe arc, este constituită din deplasări elementare  $MM'$ , care se pot asimila cu deplasările pe corzile corespunzătoare  $d\vec{r}$  (fig.8.1). În această deplasare elementară, forța  $\vec{F}$  este admisă constantă. Lucrul mecanic al forței  $\vec{F}$  pe o deplasare elementară  $d\vec{r}$  se numește *lucrul mecanic elementar*:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (8.3)$$

Dacă în relația (8.3) se înlocuiește  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ , în care  $\vec{v}$  este viteza punctului material, se obține:

$$dL = \vec{F} \vec{v} dt = |\vec{F}| |\vec{v}| \cos(\vec{F}, \vec{v}) dt \quad (8.4)$$

Lucrul mecanic al forței  $\vec{F}$ , în deplasarea finită din  $M_0$  în  $M_1$  este numit *lucrul mecanic total* sau finit și este determinat prin integrala curbilinie (8.1).

Dacă vectorii  $\vec{F}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{r}$  sunt exprimați prin proiecțiile lor pe axele unui sistem cartezian  $Oxyz$ , lucrul mecanic total are expresia:

$$L_{M_0 M_I} = \int_{M_0 M_I} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{M_0 M_I} (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z) dt \quad (8.5)$$

### 8.1.1.2. FUNCȚIA DE FORȚĂ

Se consideră o funcție scalară  $U(x,y,z)$  exprimată cu coordonatele punctului, cu ajutorul căreia pot fi scrise componentele forței astfel:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (8.6)$$

Funcția  $U$  se numește *funcție de forță*, iar forța  $\bar{F}$  se numește *forță conservativă* și derivă din funcția de forță  $U$ .

Condițiile lui *Cauchy*, de existență pentru funcția  $U$  sunt:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad (8.7)$$

Deci forța conservativă este:

$$\bar{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} = \text{grad}U = \nabla U \quad (8.8)$$

unde operatorul  $\nabla$  (*nabla*), numit și operatorul *Hamilton* este un operator vectorial, care transformă un scalar într-un vector.

Lucrul mecanic elementar este:

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU \quad (8.9)$$

iar lucrul mecanic total va fi:

$$L_{M_0 M_I} = \int_{M_0 M_I} \bar{F} d\bar{r} = \int_{M_0}^{M_I} dU = U_{M_I} - U_{M_0} \quad (8.10)$$

unde:  $U_{M_I} = U(x_I, y_I, z_I)$ ;  $U_{M_0} = U(x_0, y_0, z_0)$

Lucrul mecanic total al unei forțe conservative este independent de traiectoria parcursă și depinde numai de pozițiile inițiale și finale ale punctului.

Dintre forțele conservative, deci care formează câmpuri potențiale, amintim greutatea și forța elastică.

Greutatea are proiecțiile pe axele reperului  $Oxyz$  (fig.8.2):

$$G_x = 0; \quad G_y = 0; \quad G_z = -mg \quad (8.11)$$

Prin urmare:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -mg \quad (8.12)$$

Condițiile lui Cauchy (8.7) sunt îndeplinite și deci forța de greutate este o forță potențială. Funcția de forță pentru greutate este:

$$dU = -mg \cdot dz; U = -mgz + C \quad (8.13)$$

Lucrul mecanic total  $L_{M_0M}$  efectuat de greutate, în deplasarea punctului din poziția  $M_0$ , în poziția  $M$  are expresia:

$$\begin{aligned} L_{M_0M} &= -mgz + C - (-mgz_0 + C) = \\ &= -mg(z - z_0) \end{aligned} \quad (8.14)$$

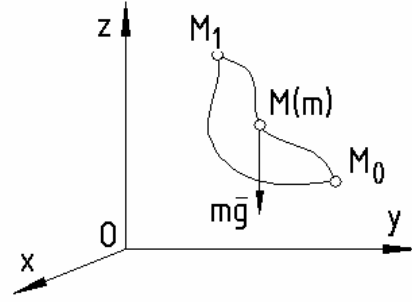


Fig. 8.2

Considerând că suportul forței elastice are o direcție oarecare în spațiu (fig.8.3) putem scrie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= F_{ex} = -kx; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_{ey} = -ky \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= F_{ez} = -kz \end{aligned} \quad (8.15)$$

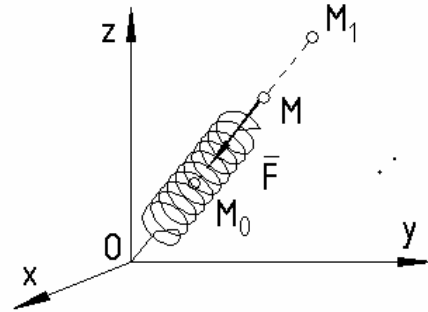


Fig. 8.3

Condițiile lui Cauchy (8.7) fiind îndeplinite, forța elastică este o forță potențială. Funcția de forță pentru forța elastică este:

$$dU = -kx \cdot dx - ky \cdot dy - kz \cdot dz; U = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C = -\frac{k}{2}r^2 + C \quad (8.16)$$

Lucrul mecanic total  $L_{M_0M}$  efectuat de forța elastică, în deplasarea punctului din poziția  $M_0$ , în poziția  $M$  este:

$$L_{M_0M} = \left(-\frac{k}{2}r^2 + C\right) - \left(-\frac{k}{2}r_0^2 + C\right) = -\frac{k}{2}(r^2 - r_0^2) \quad (8.17)$$

### 8.1.1.3. PUTEREA

Prin definiție, *puterea* este lucrul mecanic produs în unitatea de timp:

$$P = \frac{L}{t} \quad (8.18)$$

când forța și momentul (în cazul rigidului) sunt constante în timp, sau:

$$P = \frac{dL}{dt} \quad (8.19)$$

când forța și momentul sunt variabile.

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (8.20)$$



sau considerând rotația elementară ca vector:

$$P = \frac{\overline{M} \cdot d\overline{\theta}}{dt} = \overline{M} \cdot \overline{\omega} \quad (8.21)$$

#### 8.1.1.4. RANDAMENTUL MECANIC

Într-o mașină forțele motoare produc lucrul mecanic motor  $L_m$ . Forțele rezistente produc lucrul mecanic util  $L_u$ , în scopul pentru care a fost construită mașina și lucrul mecanic pasiv  $L_p$ , folosit pentru învingerea frecărilor.

$$L_m = L_u + L_p \quad (8.22)$$

Se definește randamentul mecanic, notat cu  $\eta$ , raportul:

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} \quad (8.23)$$

care este o mărime adimensională și indică modul cum folosește mașina, lucrul mecanic motor.

Exprimând lucrul mecanic util în funcție de cel motor  $L_u = L_m - L_p$  și înlocuindu-l în expresia (8.23), rezultă:

$$\eta = 1 - \frac{L_p}{L_m} = 1 - \varphi \quad (8.24)$$

unde  $\varphi = L_p / L_m$  se numește *coeficient de pierderi*.

Se constată că, întotdeauna  $\eta < 1$

#### 8.1.1.5. IMPULSUL

Noțiunea de impuls a fost introdusă sub formă științifică de Leonardo da Vinci și Galileo Galilei, numită de Newton și *cantitate de mișcare*.

Prin definiție, *impulsul* unui punct material  $M$  de masă  $m$ , care se mișcă cu viteza  $\vec{v}$ , este un vector coliniar cu  $\vec{v}$  și a cărei expresie este (fig.8.4):

$$\vec{H} = m\vec{v} \quad (8.25)$$

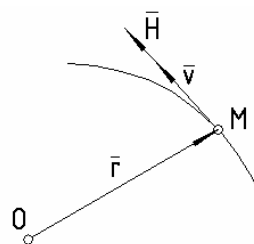


Fig. 8.4

#### 8.1.1.6. MOMENTUL CINETIC

*Momentul cinetic* al unui punct material  $M$  de masă  $m$ , care se mișcă cu viteza  $\vec{v}$ , calculat în raport cu un punct fix  $O$ , este prin definiție momentul impulsului punctului  $M$ , calculat în raport cu același punct  $O$ :

$$\bar{K}_o = \bar{r} \times \bar{H} = \bar{r} \times m\bar{v} \quad (8.26)$$

Momentul cinetic  $\bar{K}_o$  se mai numește și *momentul cantității de mișcare* și este un vector legat, analog vectorului moment al unei forțe în raport cu un punct, definit în statică (fig.8.5).

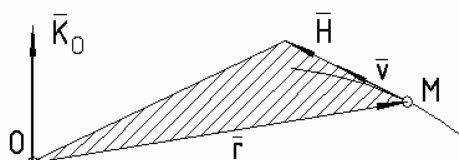


Fig. 8.5

### 8.1.1.7. ENERGIA MECANICĂ

#### *Energia cinetică*

Pentru un punct material de masă  $m$  care are viteza  $\bar{v}$ , prin definiție, energia cinetică este:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8.27)$$

Energia cinetică este o mărime de stare, scalară și strict pozitivă (mărime care caracterizează mișcarea, în orice moment).

#### *Energia potențială*

Energia potențială este o mărime care caracterizează capacitatea mișcării nemecanice de a trece într-o anumită cantitate de mișcare mecanică.

Energia potențială se pune în evidență când forțele care acționează asupra punctului material sunt forțe conservative (derivă din funcții de forță  $U$ ).

Dacă forța conservativă  $\bar{F}$  admite o funcție de forță  $U(x,y,z)$ , funcția potențial sau energia potențială reprezintă funcția de forță, luată cu semnul minus.

$$V(x, y, z) = -U(x, y, z) \quad (8.28)$$

Pentru lucrul mecanic elementar și total al forței  $\bar{F}$ , care se deplasează din poziția  $M_0$  în poziția  $M$  se obțin expresiile:

$$dL = dU = -dV; \quad L_{M_0M} = - \int_{M_0M} dV = V_0(x_0, y_0, z_0) - V(x, y, z) \quad (8.29)$$

Semnificația funcției potențial  $V(x,y,z)$  rezultă, admițând că punctul  $M_0(x_0,y_0,z_0)$  este punct de potențial zero și prin urmare, funcția de forță  $U(x_0,y_0,z_0)$  respectiv, potențialul  $V(x_0,y_0,z_0)$  sunt nule. Exprimând lucrul mecanic al forței conservative  $\bar{F}$ , când punctul se deplasează din  $M$  în  $M_0$ , rezultă:

$$L_{MM_0} = V(x, y, z) - V_0(x_0, y_0, z_0) = V(x, y, z) \quad (8.30)$$

Energia potențială a punctului material corespunzătoare poziției  $M(x,y,z)$  reprezintă lucrul mecanic efectuat de forța conservativă  $\bar{F}$  la deplasarea punctului din poziția  $M$  în poziția  $M_0$ , care prin convenție are potențialul nul.

Se numește *energie mecanică* a punctului material acționat de o forță conservativă, suma între energia cinetică și energia potențială.

$$E_m = E + V \quad (8.31)$$

## 8.1.2. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII PUNCTULUI MATERIAL

### 8.1.2.1. GENERALITĂȚI

În dinamica punctului material se întâlnesc două categorii de probleme:

*Problema directă.* Se cunosc forțele care acționează asupra punctului material ca natură, suport, sens, mărime și se cere să se stabilească mișcarea punctului material.

Forța este dată de o expresie având forma:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (8.32)$$

A cunoaște mișcarea înseamnă a obține o relație vectorială de tipul:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (8.33)$$

Legea fundamentală a dinamicii este:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (8.34)$$

Cum accelerația este  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$  și ținând seama de relația (8.32) se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (8.35)$$

S-a obținut astfel o ecuație diferențială de ordinul doi care reprezintă ecuația diferențială a mișcării. Această ecuație vectorială se proiectează pe axe și se soluționează sub formă scalară.

*Problema inversă.* Se cunoaște mișcarea, dată de o relația (8.33) și se cere forța  $\vec{F}$  care produce mișcarea. Pentru aceasta se derivează de două ori în raport cu timpul relația (8.33) și se introduce în relația fundamentală a dinamicii scrisă sub forma (8.34). Se obține astfel ecuația diferențială a mișcării.

În general problema nu este univoc determinată, deoarece nu se poate stabili și natura forței.

### 8.1.2.2. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII PUNCTULUI MATERIAL LIBER

Ecuația diferențială, sub formă vectorială (8.35), proiectată pe un sistem de axe, convenabil ales conduce la următoarele ecuații scalare, funcție de sistemul de coordonate în care se lucrează.

*În sistemul de coordonate carteziene:*

$$\begin{cases} ma_x = F_x \\ ma_y = F_y \\ ma_z = F_z \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \quad (8.36)$$

unde  $F_x, F_y, F_z$  reprezintă proiecțiile pe axele  $Ox$ ,  $Oy$  și respectiv  $Oz$  ale rezultantei forțelor care acționează asupra punctului material;

*În sistemul de coordonate naturale (triedrul Frenét):*

$$\begin{cases} ma_t = F_t \\ ma_n = F_n \\ ma_b = F_b \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} m\ddot{s} = F_t \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases} \quad (8.37)$$

unde  $F_t, F_n, F_b$  reprezintă proiecțiile pe axele sistemului Frenét (tangenta, normala principală și binormala) ale rezultantei forțelor care acționează asupra punctului material.

Integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării este în general, aceeași în toate sistemele de referință.

În continuare se vor integra ecuațiile diferențiale ale mișcării în sistemul cartezian. Ecuațiile diferențiale ale mișcării conform (8.36) vor fi:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases} \quad (8.38)$$

Sistemul de ecuații diferențiale de ordinul doi are ca necunoscute, ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (8.39)$$

Sistemul de ecuații diferențiale (8.38) admite un sistem unic de soluții, deci sub acțiunea unei forțe  $\vec{F}$  date, mișcarea efectuată de punct este unică. Integralele generale ale sistemului (8.38) conțin șase constante arbitrare de integrare  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ .

Integralele generale au expresia:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{cases} \quad (8.40)$$

Derivând în raport cu timpul relațiile (8.40) se obține:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{cases} \quad (8.41)$$

Cu ajutorul relațiilor (8.40) și (8.41) se pot determina constantele de integrare  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  punând condițiile inițiale, la  $t = t_0$ , referitoare la poziția inițială  $x_0, y_0, z_0$  și viteza inițială  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ .

Astfel condițiile inițiale de poziție sunt:

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y_0 = y(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z_0 = z(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{cases} \quad (8.42)$$

iar condițiile inițiale de viteză sunt:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{z}_0 = \dot{z}(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{cases} \quad (8.43)$$

Relațiile (8.42) și (8.43) formează un sistem algebric de 6 ecuații cu 6 necunoscute  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ . Rezolvând acest sistem se obțin valorile constantelor de integrare în funcție de condițiile inițiale date:

$$\begin{cases} C_1 = C_1(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ C_2 = C_2(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ C_3 = C_3(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ C_4 = C_4(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ C_5 = C_5(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ C_6 = C_6(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \end{cases} \quad (8.44)$$

Introducând valorile constantelor de integrare din (8.44) în (8.40) se obțin ecuațiile parametrice ale traiectoriei și introducând-le în (8.41) se obțin componentele vitezei la un moment dat. Soluția problemei este univocă.

În unele cazuri, obținerea soluției generale pentru sistemul (8.38) nu este posibilă, în schimb se pot obține *integrale prime*. O integrală primă este o funcție de timpul  $t$ , vectorul  $\vec{r}$  și vectorul  $\dot{\vec{r}}$ , care se reduce la o constantă dacă  $\vec{r}$  reprezintă o soluție a ecuației diferențiale. Integrala primă reprezintă deci în general, o ecuație diferențială al cărei ordin este mai mic cu o unitate decât ecuația diferențială dată.

*Observație.* Cu ajutorul ecuațiilor diferențiale ale mișcării punctului material se poate studia și mișcarea corpurilor întâlnite în practică, cu condiția ca forțele care acționează asupra acestora să fie concurente într-un singur punct.

### 8.1.2.3. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

Un punct material este supus la legături dacă i se impun anumite restricții geometrice, respectiv să rămână în permanență pe o suprafață sau o curbă dată.

Mișcarea punctului material supus la legături se studiază aplicând *axioma legăturilor*, în baza căreia punctul material se eliberează de legături, introducând forțele de legătură și studiind mișcarea ca și cum ar fi liber.

Notând rezultanta forțelor direct aplicate cu  $\vec{F}$  și a forțelor de legătură (reacțiunea) cu  $\vec{R}$ , ecuația de mișcare a punctului material supus la legături este:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} \quad (8.45)$$

Ecuația diferențială, sub formă vectorială (8.45), proiectată pe un sistem de axe, convenabil ales conduce la următoarele ecuații scalare:

*În sistemul de coordonate carteziene:*

$$\begin{cases} ma_x = F_x + R_x \\ ma_y = F_y + R_y \\ ma_z = F_z + R_z \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} m\ddot{x} = F_x + R_x \\ m\ddot{y} = F_y + R_y \\ m\ddot{z} = F_z + R_z \end{cases} \quad (8.46)$$

unde  $F_x, F_y, F_z$  și  $R_x, R_y, R_z$  sunt proiecțiile pe axele  $Ox, Oy, Oz$  ale rezultantei forțelor direct aplicate, și de legătură care acționează asupra punctului material.

*În sistemul de coordonate naturale (triedrul Frenét):*

$$\begin{cases} ma_t = F_t + R_t \\ ma_n = F_n + R_n \\ ma_b = F_b + R_b \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} m\ddot{s} = F_t + R_t \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n + R_n \\ 0 = F_b + R_b \end{cases} \quad (8.47)$$

unde  $F_t, F_n, F_b$  și  $R_t, R_n, R_b$  reprezintă proiecțiile pe axele sistemului Frenét ale rezultantei forțelor direct aplicate și de legătură

Integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării este aceeași ca în cazul punctului material liber.

### 8.1.3. TEOREMELE GENERALE ÎN DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

#### 8.1.3.1. TEOREMA IMPULSULUI

*Derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală în fiecare moment cu rezultanta forțelor care acționează asupra punctului.*

Derivând în raport cu timpul impulsul dat de relația (8.25) se obține:

$$\dot{\vec{H}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} \quad (8.48)$$

Cum în baza legii fundamentale a dinamicii (8.34),  $m\bar{a} = \bar{F}$ , rezultă:

$$\dot{\bar{H}} = \bar{F} \quad (11.49)$$

Proiectând pe axe relația (8.49) se obține:

$$\dot{H}_x = F_x; \quad \dot{H}_y = F_y; \quad \dot{H}_z = F_z \quad (11.50)$$

### *Conservarea impulsului*

Dacă în timpul mișcării punctul material este izolat sau rezultanta forțelor care acționează asupra acestuia este nulă, atunci:

$$\bar{F} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{H}} = 0; \quad \bar{H} = \bar{C} \quad (8.51)$$

Deci *impulsul se conservă, adică păstrează în timp aceeași valoare*. Constanta  $\bar{C}$  se determină din condițiile inițiale ale problemei.

Este posibil să se conserve în timp o singură componentă a impulsului. Astfel, dacă:

$$F_x = 0 \Rightarrow \dot{H}_x = 0; \quad H_x = C \quad (8.52)$$

În acest caz se conservă componenta impulsului după axa  $Ox$ .

## **8.1.3.2. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC**

*Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic calculat în raport cu un punct fix  $O$ , este egală cu momentul în raport cu același punct al rezultantei forțelor care acționează asupra punctului material.*

Derivând în raport cu timpul expresia momentului cinetic (8.26), rezultă:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \dot{\bar{r}} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\dot{\bar{v}} = \bar{r} \times m\bar{a} = \bar{r} \times \bar{F} \quad (8.53)$$

Cum  $\bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0$  reprezintă momentul în raport cu punctul  $O$ , al rezultantei forțelor care acționează asupra punctului material, rezultă teorema momentului cinetic:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0 \quad (8.54)$$

Proiectând pe axe, relația (8.54) se obține:

$$\dot{K}_x = M_x; \quad \dot{K}_y = M_y; \quad \dot{K}_z = M_z \quad (8.55)$$

### *Conservarea momentului cinetic*

Dacă în timpul mișcării, punctul material este izolat sau momentul resultant care acționează asupra acestuia este nul, rezultă:

$$\bar{M}_0 = 0 \Rightarrow \dot{\bar{K}}_0 = 0; \quad \bar{K}_0 = \bar{C} \quad (8.56)$$

Deci *momentul cinetic se conservă, adică păstrează aceeași valoare în timp*. Constanta  $\bar{C}$  se determină din condițiile inițiale.

Se poate conserva o singură componentă a momentului cinetic, de exemplu:

$$M_x = 0 \Rightarrow \dot{K}_x = 0; K_x = C \quad (8.57)$$

În acest caz se conservă componenta momentului cinetic după axa  $Ox$ .

### 8.1.3.3. TEOREMA ENERGIEI CINETICE

*Variația energiei cinetice a punctului material în intervalul de timp  $dt$ , este egală cu lucrul mecanic elementar, efectuat de rezultanta forțelor aplicate punctului în același interval de timp. (forma diferențială)*

Diferențiind relația energiei cinetice și ținând seama de legea fundamentală a mecanicii (8.34),  $\vec{F} = m\vec{a}$ , rezultă:

$$dE = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}md(\bar{v}^2) = m\bar{v}d\bar{v} = m\bar{v}dt \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a}d\bar{r} = \vec{F} \cdot d\bar{r} = dL$$

Termenul din stânga reprezintă o diferențială totală exactă, pe când termenul din dreapta  $dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$  reprezintă o diferențială de tip *Pfaff*, care este o diferențială totală exactă, numai în cazul particular al forțelor conservative. Forma diferențială a teoremei energiei cinetice este:

$$dE = dL \quad (8.58)$$

Integrând rezultă *teorema energiei cinetice, forma integrală*:

$$E_I - E_o = L_{M_o M_I} \quad (8.59)$$

*Variația energiei cinetice între poziția inițială și finală a mișcării punctului material este egală cu lucrul mecanic total efectuat în deplasarea finită între cele două poziții, de rezultanta forțelor aplicate punctului material.*

*Conservarea energiei mecanice*

*Când rezultanta forțelor aplicate punctului material, derivă dintr-o funcție de forță, energia mecanică a punctului se conservă.*

Se consideră teorema energiei cinetice scrisă sub formă diferențială și se presupune că forțele derivă dintr-o funcție de forță, adică:

$$dL = dU \quad (8.60)$$

Cum energia potențială este  $V = -U$ , atunci:

$$dV = -dU$$

Din relațiile (8.58) și (8.60) rezultă:

$$dE = dU; d(E - U) = 0; d(E + V) = 0 \quad (8.61)$$

de unde:

$$E_m = E + V = \text{const.} \quad (8.62)$$



**Aplicații. 1.** Pendulul matematic din figura 8.6, constituit dintr-un fir de lungime  $l$ , de care este prinsă o bilă  $M$  de masa  $m$  se deplasează pe o traiectorie circulară într-un plan vertical, cu centrul în punctul de fixare  $O$ . Pendulului, scos din poziția de echilibru, i se dă o rotire inițială  $\theta_0$  și o viteză inițială  $v_0$ . Să se determine legea de mișcare și tensiunea din fir.

*Rezolvare.* Prin proiectarea legii fundamentale pe axele sistemului natural se obțin ecuațiile diferențiale ale mișcării:

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta \\ m \frac{v^2}{l} = N - mg \cos \theta \end{cases}$$

Considerând legea de mișcare a pendulului dată de unghiul la centru  $\theta = \theta(t)$  și înlocuind  $v = l\dot{\theta}$ , în prima ecuație a sistemului rezultă ecuația diferențială a mișcării pendulului:

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0$$

În cazul micilor deplasări, când  $\theta < 5^\circ$ , și  $\sin \theta \approx \theta$ , ecuația devine o ecuație diferențială, liniară de ordinul doi, cu coeficienți constanți și omogenă.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Notând cu  $p = \sqrt{g/l}$  - pulsația proprie a mișcării pendulului și introducând această notație în ecuația diferențială a mișcării, rezultă:

$$\ddot{\theta} + p^2 \theta = 0$$

a cărei soluție:

$$\theta = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt$$

exprimă legea de mișcare și care derivată în raport cu timpul conduce la expresia vitezei unghiulare:

$$\dot{\theta} = C_1 p \cos pt - C_2 p \sin pt$$

în care constantele de integrare  $C_1$  și  $C_2$  care se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$$t = 0 \quad \begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{l} \end{cases}$$

Rezultă valorile constantelor de integrare  $C_1$  și  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{v_0}{lp}; \quad C_2 = \theta_0$$

care introduse în soluția ecuației diferențiale, și ținând seama de expresia pulsației proprii  $p$ , rezultă legea de mișcare:

$$\theta = \frac{v_0}{\sqrt{lg}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

care poate fi scrisă și sub forma:

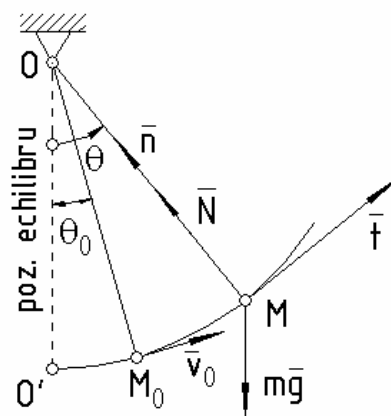


Fig. 8.6

$$\theta = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right)$$

unde:  $A$  – amplitudinea mișcării;  $\varphi$  - faza inițială

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\frac{v_0^2}{lg} + \theta_0^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{C_2}{C_1} = \arctg\left(\sqrt{lg} \frac{\theta_0}{v_0}\right)$$

Deci:

$$\theta = \sqrt{\frac{v_0^2}{lg} + \theta_0^2} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \arctg\sqrt{lg} \frac{\theta_0}{v_0}\right)$$

Mișcarea pendulului matematic este periodică cu perioada  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ .

Mărimea tensiunii  $N$  se obține din a doua ecuație a sistemului de ecuații diferențiale, în funcție de poziția  $\theta$  și viteza  $v$  a punctului  $M$ , pe traiectorie.

$$N = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{l}$$

Exprimarea vitezei punctului  $M$ , în funcție de poziția pe traiectorie, definită de legea de mișcare  $\theta(t)$ , se obține din prima ecuație diferențială a sistemului, exprimând mișcarea cu deplasări (oscilații) mari:

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0; \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Înmulțind ecuația diferențială cu  $\dot{\theta}$  și apoi integrând-o, rezultă:

$$\ddot{\theta} \cdot \dot{\theta} + \frac{g}{l} \dot{\theta} \sin \theta = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) - \frac{g}{l} \frac{d}{dt}(\cos \theta) = 0; \quad \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \theta = C$$

Constanta de integrare  $C$  se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \quad \begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{l} \end{cases}$$

Rezultă valoarea constantei de integrare  $C$ :

$$C = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \theta_0 = \frac{v_0^2}{2l^2} - \frac{g}{l} \cos \theta_0$$

care introdusă în ecuația diferențială, integrată conduce la expresia vitezei în funcție de poziția punctului  $M$ :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \theta = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \theta_0; \quad \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2 \frac{g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Înmulțind această ultimă expresie cu  $l^2$  și având în vedere că  $v = l\dot{\theta}$ , obținem:

$$v^2 = v_0^2 + 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

care introdusă în expresia reacțiunii  $N$ , va conduce la:

$$N = mg \cos \theta + \frac{m}{l} \left[ v_0^2 + 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0) \right] = \frac{mv_0^2}{2} + mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

2. În momentul opririi motorului, o ambarcațiune (fig.8.7) cu greutatea  $P = 400N$  are viteza  $v_0 = 1Nd$ , ( $1Nd \approx 1,853Km/h \approx 0,515m/s$ ). Rezistența apei pentru viteze mici se consideră proporțională cu viteza  $R = cv$ , factorul de proporționalitate fiind  $c = 9,3Ns/m$ . Să se determine după cât timp, viteza ambarcațiunii se reduce la jumătatea valorii inițiale și care este drumul parcurs în acest timp.

*Rezolvare.* Timpul după care viteza ambarcațiunii se reduce la jumătatea valorii inițiale se determină utilizând teorema impulsului, proiectată pe direcția mișcării, axa  $Ox$ :

$$\dot{H}_x = -R$$

respectiv:

$$\frac{d}{dt}(mv) = -cv$$

prin separarea variabilelor se ajunge la ecuația diferențială:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{c}{m}dt$$

care integrată în domeniile  $[0, t_1]$ , pentru variabila  $t$ , și  $[v_0, v_0/2]$ , pentru variabila  $v$ , rezultă timpul  $t_1$ :

$$\int_{v_0}^{v_0/2} \frac{dv}{v} = -\int_0^{t_1} \frac{c}{m}dt; \ln v \Big|_{v_0}^{v_0/2} = -\frac{c}{m}t \Big|_0^{t_1}$$

$$t_1 = \frac{m}{c} \left( \ln v_0 - \ln \frac{v_0}{2} \right) = \frac{P}{cg} \ln 2 = \frac{400}{9,3 \cdot 9,81} 0,693 \approx 3s$$

Drumul parcurs de ambarcațiune în acest interval de timp se obține utilizând teorema energiei cinetice, forma finită, prin integrarea în domeniile  $[v_0, v_0/2]$ , pentru variabila  $v$  și  $[0, x_1]$ , pentru variabila  $x$ :

$$\int d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int (-cv)dx; \int_{v_0}^{v_0/2} dv = -\frac{c}{m} \int_0^{x_1} dx; \frac{v_0}{2} - v_0 = -\frac{c}{m}x_1$$

$$x_1 = \frac{Pv_0}{2cg} = \frac{400 \cdot 0,515}{2 \cdot 9,3 \cdot 9,81} \approx 1,13m$$

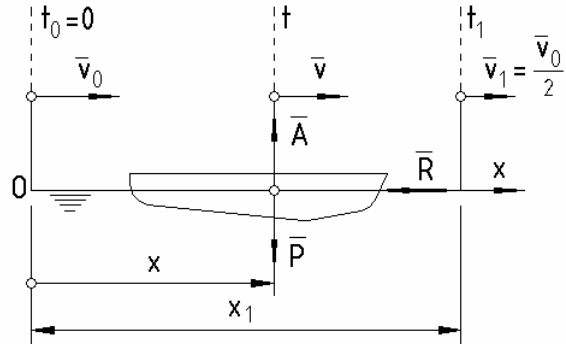


Fig. 8.7

3. O sferă  $M$  de masă  $m$  se situează în poziția superioară  $M_0$  pe un semicilindru luciu de rază  $R = 0,5m$ , și primește viteza inițială  $v_0 = 0,7m/s$  perpendicular pe generatoare. Să se determine poziția caracterizată de unghiul la centru  $\varphi_1$  în care sfera se desprinde de cilindru și începe mișcarea liberă (fig.8.8).

*Rezolvare* Poziția punctului de desprindere al sferei de pe cilindru este definită de un unghi  $\varphi_1$ , pentru care reacțiunea asupra sferei devine nulă. Proiectând legea fundamentală pe axele triedrului Frenet vor rezulta ecuațiile diferențiale ale mișcării.

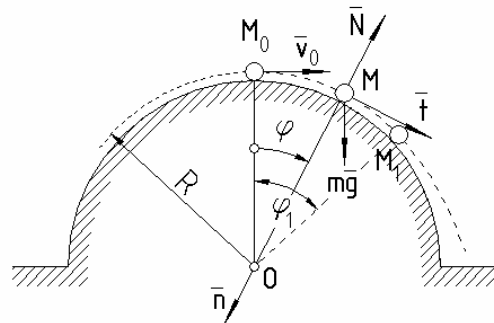


Fig. 8.8

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg \sin \varphi \\ m \frac{v^2}{R} = mg \cos \varphi - N \end{cases}$$

Din a doua ecuație a sistemului, rezultă reacțiunea  $N$ :

$$N = mg \cos \varphi - \frac{m}{R} v^2$$

Poziția de desprindere a sferei definită de unghiul  $\varphi_l$  este dată condiția:

$$N = 0 \Rightarrow mg \cos \varphi_l - \frac{m}{R} v_l^2 = 0$$

Pentru a determina valoarea unghiului  $\varphi_l$  va trebui exprimată viteza punctului,  $v$  în funcție de poziția lui  $\varphi$ , posibilitate dată de prima ecuație diferențială a sistemului.

Având în vedere că accelerația tangențială are expresia:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = R \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R\omega \frac{d\omega}{d\varphi}$$

aceasta se înlocuiește în prima ecuație diferențială a sistemului și simplificând prin  $m$ , obținem:

$$R\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = g \sin \varphi$$

Integrând, rezultă o primitivă, a cărei constantă de integrare se determină din condițiile inițiale:

$$\frac{R\omega^2}{2} = -g \cos \varphi + C.$$

$$t = 0; \quad \varphi_0 = 0; \quad \omega_0 = \frac{v_0}{R}$$

Constanta de integrare are valoarea:

$$C = \frac{v_0^2}{2R} + g$$

și:

$$v^2 = v_0^2 + 2gR(1 - \cos \varphi)$$

Pentru poziția de desprindere definită de unghiul  $\varphi_l$ , viteza sferei este  $v_l$ :

$$v_l^2 = v_0^2 + 2gR(1 - \cos \varphi_l)$$

Introducând expresia vitezei  $v_l$  în condiția de desprindere, rezultă

$$\cos \varphi_l = \frac{v_0^2 + 2gR}{3gR}$$

și de aici, valoarea unghiului  $\varphi_l$ :

$$\varphi_l = \arccos \frac{v_0^2 + 2gR}{3gR} = \arccos \frac{(0,7)^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{3 \cdot 9,81 \cdot 0,5} = 45^\circ 35'$$

## 8.2. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL ÎN MIȘCARE RELATIVĂ

### 8.2.1. LEGEA FUNDAMENTALĂ ÎN MIȘCAREA RELATIVĂ

Legea fundamentală a dinamicii (8.34), scrisă pentru mișcarea unui punct material în raport cu un sistem de referință fix a fost stabilită de Newton:

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

Ne propunem să determinăm corecțiile necesare, efectuate în legea fundamentală a dinamicii punctului material, în mișcarea acestuia în raport cu un sistem de referință care este în mișcare față de sistemul fix, numit sistem de referință mobil (*transportor*).

Se va utiliza expresia accelerației absolute a punctului definită de (7.14)?.

$$\bar{a}_a = \bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \quad (8.63)$$

Din relația (8.63) rezultă:

$$\bar{a}_r = \bar{a} - \bar{a}_t - \bar{a}_c \quad (8.64)$$

Multiplicând relația (8.64) cu masa  $m$  a punctului se obține:

$$m\bar{a}_r = m\bar{a} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c \quad (8.65)$$

unde:

- $m\bar{a} = \bar{F}$  reprezintă rezultanta forțelor direct aplicate și de legătură;
- $-m\bar{a}_t = \bar{F}_t$  este *forța inerțială de transport*;
- $-m\bar{a}_c = \bar{F}_c$  este *forța inerțială Coriolis*.

Cu notațiile de mai sus, legea fundamentală a dinamicii, în mișcarea relativă (8.65) devine:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c \quad (8.66)$$

În raport cu un sistem de referință mobil, legea fundamentală a dinamicii se corectează cu doi termeni,  $\bar{F}_t$  și  $\bar{F}_c$ , numite forțe inerțiale întrucât nu corespund unor acțiuni mecanice, exercitate asupra punctului material.

### 8.2.2. SISTEME INERȚIALE

Există sisteme de referință mobile în raport cu care legea fundamentală se scrie la fel ca și în raport cu sistemul de referință fix.

$$m\bar{a}_r = \bar{F} \quad (8.67)$$

În acest caz pentru ca relațiile (8.66) și (8.67) să fie identice trebuie ca:

$$\begin{cases} \bar{F}_t = 0 \Rightarrow \bar{a}_t = 0 \\ \bar{F}_c = 0 \Rightarrow \bar{a}_c = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r = 0 \Rightarrow \bar{\omega}_t = 0 \end{cases} \quad (8.68)$$

Rezultă că un astfel de sistem, numit *sistem inerțial* trebuie să efectueze o mișcare de translație ( $\bar{\omega}_t = 0$ ), uniformă ( $\bar{a}_t = 0$ ).

### 8.2.3. REPAUSUL RELATIV

Pentru determinarea condiției de repaus relativ (punctul material se află în repaus față de sistemul mobil) trebuie îndeplinite condițiile:

$$\begin{cases} \bar{v}_r = 0 \Rightarrow \bar{F}_c = -2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r = 0 \\ \bar{a}_r = 0 \Rightarrow m\bar{a}_r = 0 \end{cases} \quad (8.69)$$

Introducând condițiile (8.69) în legea fundamentală (8.66), rezultă:

$$\bar{F} + \bar{F}_t = 0 \quad (8.70)$$

Condiția de repaus relativ a punctului material este ca rezultanta forțelor aplicate, de legătură și de transport să fie nulă.

**Aplicații. 1.** Un cadru  $O_1OB$  constituit din axul vertical  $O_1O$  și bara orizontală  $OB$  se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\omega$  în jurul axului  $O_1O$  (fig.8.9). Pe bara  $OB$  alunecă cursorul  $M$  care în momentul inițial se află în repaus la distanța  $OA = a$ . Cunoscând lungimea barei  $OB = l$  să se determine viteza relativă a cursorului în momentul în care părăsește bara.

*Rezolvare.* Sistemul de referință fix la care se raportează mișcarea cadrului (transportorul) este  $Ox_1y_1z_1$  iar sistemul mobil față de care se raportează mișcarea cursorului este  $Oxyz$  cu axa  $Ox$ , bara  $OB$  după care are loc mișcarea relativă a cursorului, axa  $Oz \equiv Oz_1$ .

Legea fundamentală a dinamicii în mișcarea relativă este dată de relația:

$$m\bar{a}_r = \bar{G} + \bar{H} + \bar{V} + \bar{F}_t + \bar{F}_c$$

unde:

$$\begin{cases} \bar{a}_r = \ddot{x}\bar{i} \\ \bar{G} = -mg\bar{k} \\ \bar{H} = -H\bar{j} \\ \bar{V} = V\bar{k} \\ \bar{F}_t = -m\bar{a}_t = -m(-\omega^2 x\bar{i}) = m\omega^2 x\bar{i} \\ \bar{F}_c = -m\bar{a}_c = -m(2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) = \\ = -m[2\omega\bar{k} \times (\dot{x}\bar{i})] = -2m\omega\dot{x}\bar{j} \end{cases}$$

Proiectând legea fundamentală (forma vectorială) pe axele sistemului mobil  $Oxyz$  rezultă:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m\omega^2 x \\ 0 = 2m\omega\dot{x} - H \\ 0 = -mg + V \end{cases}$$

Ecuția mișcării relative a cursorului devine:

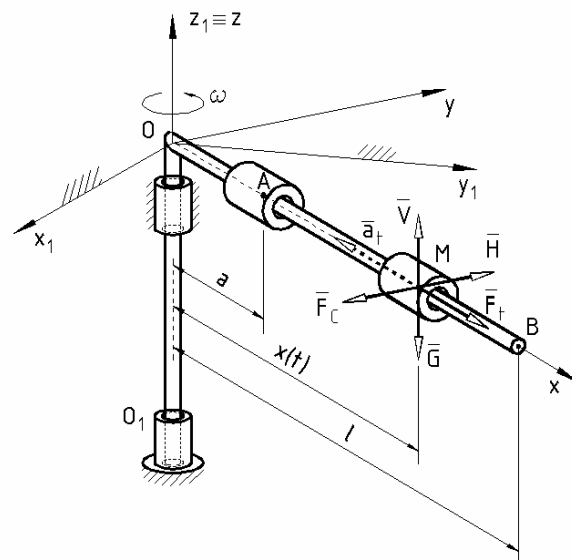


Fig. 8.9

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

și a cărei ecuație caracteristică este:

$$r^2 - \omega^2 = 0$$

cu rădăcinile  $r_{1,2} = \pm \omega$

Legea mișcării relative și viteza relativă se pot scrie:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \\ \dot{x}(t) = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} \end{cases}$$

Constantele de integrare  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condițiile inițiale, la momentul  $t = 0$ :

$$t = 0 \quad \begin{cases} x(0) = a \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$$

care introduse în legea mișcării relative și vitezei relative conduc la:

$$x(t) = \frac{l}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})a = a \cosh \omega t; \quad \dot{x}(t) = \frac{l}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})a\omega = a \omega \sinh \omega t$$

Viteza relativă a cursorului în capătul  $B$  al barei se determină pentru timpul  $t_l$  când cursorul parcurge întreaga lungime  $OB = l$  a barei.

$$t = t_l \quad \begin{cases} x(t_l) = l \\ \dot{x}(t_l) = v_{Br} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cosh \omega t_l = l \\ a \omega \sinh \omega t_l = v_{Br} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cosh \omega t_l = \frac{l}{a} \\ \sinh \omega t_l = \frac{v_{Br}}{a\omega} \end{cases}$$

Conform relației trigonometrice:

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

rezultă expresia:

$$\left(\frac{l}{a}\right)^2 - \left(\frac{v_{Br}}{a\omega}\right)^2 = 1$$

și de aici expresia vitezei relative a cursorului în momentul când parasește bara:

$$v_{Br} = \omega \sqrt{l^2 - a^2}$$

**2.** Pe o bară lucie a cărei linie axială este curba  $y = f(x)$ , (fig.8.10) situată într-un plan vertical și care se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\omega$  în jurul axei verticale, alunecă un cursor  $M$  de masă  $m$ . Să se determine ecuația curbei  $y = f(x)$ , astfel încât cursorul să fie în echilibru, indiferent de poziția pe bară.

*Rezolvare.* Condiția de echilibru relativ a cursorului  $M$ , conform relației (11.70) este:

$$\vec{F} + \vec{F}_t = 0 \Rightarrow (m\vec{g} + \vec{N}) + \vec{F}_t = 0$$

unde forța inercială de transport  $F_t$  are expresia:

$$F_t = ma_t = m\omega^2 r = m\omega^2 x$$

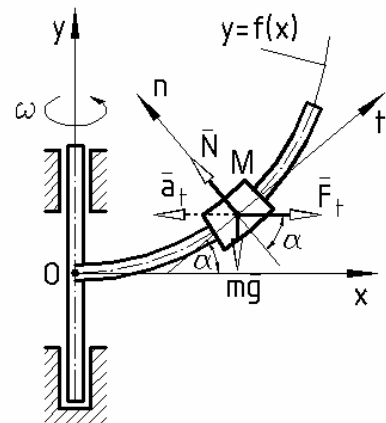


Fig. 8.10

Proiectând ecuația vectorială de echilibru pe axa  $Mt$  a sistemului mobil  $Mtn$ , tangentă la curba  $y = f(x)$  și ținând seama de expresia forței de transport, rezultă:

$$-mg \cos \alpha + F_t \sin \alpha = 0; \quad mg \cos \alpha - m\omega^2 x \sin \alpha = 0 \quad \text{tg} \alpha = \frac{\omega^2}{g} x$$

Tangenta într-un punct al curbei reprezintă derivata funcției  $y = f(x)$  în raport cu variabila  $x$ , astfel:

$$\text{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

Cum membrii din stânga ai celor două ecuații sunt identici, rezultă și identitatea membrilor din dreapta, și de aici ecuația curbei  $y = f(x)$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x; \quad dy = \frac{\omega^2}{g} x dx \Rightarrow y = \frac{\omega^2}{g} \frac{x^2}{2} + C$$

Constanta de integrare  $C$  se determină din condițiile limită:

$$x = 0; \quad y = f(0) = 0$$

Introducând aceste condiții în ecuația curbei, rezultă valoarea constantei de integrare  $C = 0$  și ecuația curbei devine:

$$y = \frac{\omega^2}{g} \frac{x^2}{2}$$

care este o parabolă ce trece prin originea sistemului de axe  $Oxy$ .

## TEST DE EVALUARE

- Lucrul mecanic elementar al unei forțe este:
  - $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$
  - $dL = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$
  - $dL = |\vec{F}| |\vec{v}| dt \cos(\vec{F}, \vec{v})$
- Lucrul mecanic efectuat de o forță în deplasarea pe o curbă între pozițiile  $M_0$  și  $M_1$  are expresia  $L_{M_0 M_1} = \int_{M_0 M_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Expresia  $L_{M_0 M_1} = \vec{F} \cdot \vec{r}$  nu este corectă deoarece:
  - forța variază în timp ca mărime și direcție
  - direcțiile forței și deplasării nu sunt constante în timp
  - ambii vectori sunt variabili în timp
- Puterea este definită de relația:
  - $P = \frac{dL}{dt}$
  - $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$
  - $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
- Momentul cinetic  $\vec{K}_O$  este un vector:
  - coplanar cu vectorii  $\vec{r}$  și  $\vec{H}$
  - coliniar cu vectorul  $\vec{H}$
  - perpendicular pe planul vectorilor  $\vec{r}$  și  $\vec{H}$



5. Forța conservativă reprezintă:
  - a. gradientul funcției de forță  $U - \text{grad}U$
  - b. funcția de forță  $U$
  - c. nici una din variantele  $a$  și  $b$
6. Lucrul mecanic total al unei forțe conservative:
  - a. este independent de traiectorie
  - b. depinde de poziția inițială și finală a punctului
  - c. trebuie îndeplinite condițiile  $a$  și  $b$
7. Energia potențială reprezintă:
  - a. capacitatea mișcării nemecanice de a trece în mișcare mecanică
  - b. lucrul mecanic efectuat de o forță conservativă la deplasarea dintr-o poziție curentă în poziția de potențial nul
  - c. oricare din variantele  $a$  și  $b$
8. Energia mecanică se conservă dacă forțele care acționează asupra punctului:
  - a. sunt forțe conservative
  - b. derivă din funcții de forță
  - c. oricare din variantele  $a$  și  $b$
9. În ecuația diferențială a mișcării punctului material supus la legături  $m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}$ ,  $\bar{R}$  reprezintă:
  - a. rezultanta forțelor de legătură
  - b. rezultanta forțelor direct aplicate
  - c. rezultanta forțelor conservative
10. Legea fundamentală a dinamicii în mișcarea relativă a punctului material este:
  - a.  $m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t$
  - b.  $m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c$
  - c.  $m\bar{a}_r = \bar{F}$
11. Condiția de repaus relativ este definită de expresia:
  - a.  $\bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c = 0$
  - b.  $\bar{F} + \bar{F}_{tc} = 0$
  - c.  $\bar{F}_t + \bar{F}_c = 0$
12. Sistemul inerțial reprezintă:
  - a. un sistem mobil în raport cu care legea fundamentală are aceeași formă ca în mișcarea în raport cu un sistem de referință fix
  - b. un sistem mobil în mișcare de translație uniformă
  - c. oricare din variantele  $a$  și  $b$

## 9. DINAMICA SISTEMELOR MATERIALE ȘI A RIGIDULUI

*Sistemul material* se definește ca un ansamblu de puncte materiale sau corpuri solide aflate în interacțiune mecanică. Dacă dimensiunile corpurilor din sistem sunt neglijabile în raport cu distanțele dintre ele, acestea pot fi tratate ca sisteme de puncte materiale.

*Corpul solid (rigidul)* se definește ca un continuu material nedeformabil putând fi considerat ca limita unui sistem închis și rigid de puncte materiale care ocupă același domeniu.

În cele ce urmează, unele noțiuni fundamentale și teoreme generale, stabilite pentru un sistem de puncte materiale sunt extinse la rigid, pe baza unui proces de trecere la limită.

### 9.1. NOȚIUNI FUNDAMENTALE

#### 9.1.1. MOMENTE DE INERȚIE MASICE

##### 9.1.1.1. DEFINIȚII

Momentele de inerție sunt mărimi care caracterizează modul de distribuire a masei unui sistem material sau rigid în raport cu un reper (*plan, axă, pol*). *Momentele de inerție masice* caracterizează inerția corpurilor în mișcare de rotație așa cum *masa* caracterizează inerția corpurilor în mișcare de translație.

Considerând un sistem de puncte materiale  $A_i$  având masele  $m_i$  și distanțele în raport cu un reper,  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), momentul de inerție al sistemului în raport cu reperul considerat are expresia:

$$J = \sum_i m_i l_i^2 \quad (9.1)$$

În cazul rigidului, suma se transformă în integrala referitoare la domeniul ( $D$ ) ocupat de corp.

$$J = \int_{(D)} l^2 dm \quad (9.2)$$

După cum lungimea  $l_i$  respectiv  $l$  reprezintă distanța la un plan, axă sau pol (punct), momentele de inerție sunt (fig.9.1):

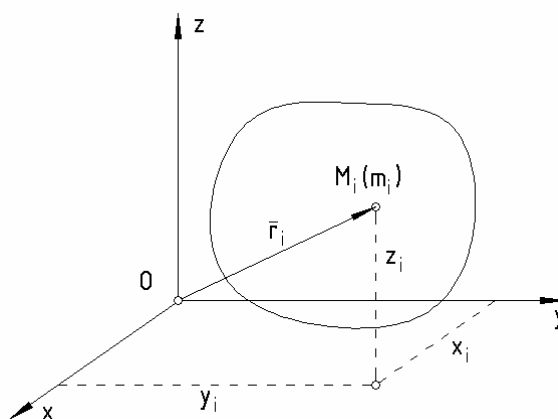


Fig. 9.1

*Momente de inerție planare*

Pentru sistem material:

$$J_{0xy} = \sum_i m_i z_i^2, \quad J_{0xz} = \sum_i m_i y_i^2, \quad J_{0yz} = \sum_i m_i x_i^2 \quad (9.3)$$

Pentru rigid:

$$J_{0xy} = \int_{(D)} z^2 dm, \quad J_{0xz} = \int_{(D)} y^2 dm, \quad J_{0yz} = \int_{(D)} x^2 dm \quad (9.4)$$

*Momente de inerție axiale*

Pentru sistem material:

$$J_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_y = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad J_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (9.5)$$

Pentru rigid:

$$J_x = \int_{(D)} (y^2 + z^2) dm, \quad J_y = \int_{(D)} (x^2 + z^2) dm, \quad J_z = \int_{(D)} (x^2 + y^2) dm \quad (9.6)$$

*Momentul de inerție polar*

Pentru sistem material:

$$J_0 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i r_i^2 \quad (9.7)$$

Pentru rigid:

$$J_0 = \int_{(D)} (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int_{(D)} r^2 dm \quad (9.8)$$

*Momente de inerție centrifugale*

Pentru sistem material:

$$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i, \quad J_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i, \quad J_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i \quad (9.9)$$

Pentru rigid:

$$J_{xy} = \int_{(D)} xy dm, \quad J_{xz} = \int_{(D)} xz dm, \quad J_{yz} = \int_{(D)} yz dm \quad (9.10)$$

*Caz particular: Sistemul material sau rigidul situat în plan*

Considerând planul în care este situat sistemul sau corpul (fig.9.2) ca fiind planul  $[Oxy]$ , de ecuație  $z = 0$ , momentele de inerție definite de relațiile (9.2)...(9.10) devin:

*Momente de inerție axiale*

Pentru sistem material:

$$J_x = \sum_i m_i y_i^2, \quad J_y = \sum_i m_i x_i^2 \quad (9.11)$$

Pentru rigid:

$$J_x = \int_{(D)} y^2 dm, \quad J_y = \int_{(D)} x^2 dm, \quad (9.12)$$

*Momentul de inerție polar*

Pentru sistem material:

$$J_0 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_x + J_y = J_z \quad (9.13)$$

Pentru rigid:

$$J_0 = \int_{(D)} (x^2 + y^2) dm = J_x + J_y = J_z \quad (9.14)$$

*Momentul de inerție centrifugal*

Pentru sistem material:

$$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i \quad (9.15)$$

Pentru rigid:

$$J_{xy} = \int_{(D)} xy dm \quad (9.16)$$

*Observație:* Momentul de inerție polar din plan este momentul de inerție axial în raport cu axa normală la planul în care se situează sistemul material sau rigidul.

### 9.1.1.2. RELAȚII ÎNTRE MOMENTELE DE INERȚIE

Din relațiile (9.3)...(9.8) se obțin:

*Momentul de inerție polar este suma momentelor de inerție planare, rectangulare care trec prin polul considerat.*

$$J_0 = J_{0xy} + J_{0xz} + J_{0yz} \quad (9.17)$$

*Momentul de inerție polar este semisuma momentelor de inerție axiale, rectangulare în polul considerat.*

$$J_0 = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z) \quad (9.18)$$

*Momentul de inerție axial este suma momentelor de inerție planare, rectangulare pe axa considerată.*

$$J_x = J_{0xy} + J_{0xz}, \quad J_y = J_{0xy} + J_{0yz}, \quad J_z = J_{0xz} + J_{0yz} \quad (9.19)$$

### 9.1.1.3. RAZA DE INERȚIE

Raza de inerție reprezintă distanța fictivă la care trebuie plasată întreaga masă a sistemului (corpului), concentrată într-un singur punct astfel ca în raport cu un reper să existe relația:

$$J = M \cdot i^2 \Rightarrow i = \sqrt{\frac{J}{M}} \quad (9.20)$$

După cum reperul este un plan, o axă sau un pol, se definesc:

Rază de inerție planară:

$$i_{0xy} = \sqrt{\frac{J_{0xy}}{M}}, \quad i_{0xz} = \sqrt{\frac{J_{0xz}}{M}}, \quad i_{0yz} = \sqrt{\frac{J_{0yz}}{M}} \quad (9.21)$$

Rază de inerție axială:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{M}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}} \quad (9.22)$$

Rază de inerție polară:

$$i_0 = \sqrt{\frac{J_0}{M}} \quad (9.23)$$

#### 12.1.1.4. VARIAȚIA MOMENTELOR DE INERȚIE ÎN RAPORT CU AXE PARALELE

Se dă un sistem de puncte materiale  $M_i$  de mase  $m_i$  cu centrul de greutate  $C$ . Fie o axă  $\Delta$  care trece prin  $C$  și o axă  $\Delta_1$  paralelă cu  $\Delta$ , distanța dintre cele două axe fiind  $d$  (fig.9.2). Cunoscând momentul de inerție al sistemului  $J_\Delta$  și masa sistemului  $m$  să calculăm momentul de inerție  $J_{\Delta_1}$ .

Se alege un sistem de referință  $Cxyz$  cu axa  $Cz \equiv \Delta$ . Față de acest triedru, punctul  $M_i$  are coordonatele  $x_i, y_i, z_i$ . Se alege un al doilea sistem de referință  $O_1x_1y_1z_1$  care are axele paralele cu cele ale triedrului precedent, planele de referință  $O_1x_1y_1$  și  $Cxy$  fiind confundate ( $[Cxy] \in [O_1x_1y_1]$ ) iar axa  $O_1z_1 \equiv \Delta_1$ .

Față de acest triedru, punctul  $M_i$  are coordonatele  $x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}$ .

Între coordonatele punctului  $M_i$  din planele confundate există relațiile:

$$\begin{cases} x_{1i} = x_C + x_i \\ y_{1i} = y_C + y_i \end{cases}$$

unde:  $x_C$  și  $y_C$  sunt coordonatele centrului de greutate  $C$  în raport cu sistemul de referință  $O_1x_1y_1z_1$ .

Prin definiție:

$$J_\Delta = J_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} J_{\Delta_1} = J_{z_1} &= \sum_i m_i (x_{1i}^2 + y_{1i}^2) = \sum_i m_i [(x_C + x_i)^2 + (y_C + y_i)^2] = \\ &= (x_C^2 + y_C^2) \sum_i m_i + 2x_C \sum_i m_i x_i + 2y_C \sum_i m_i y_i + \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \quad (9.24)$$

Se notează:

$$\sum_i m_i = M, \quad x_C^2 + y_C^2 = d^2 \quad (9.25)$$

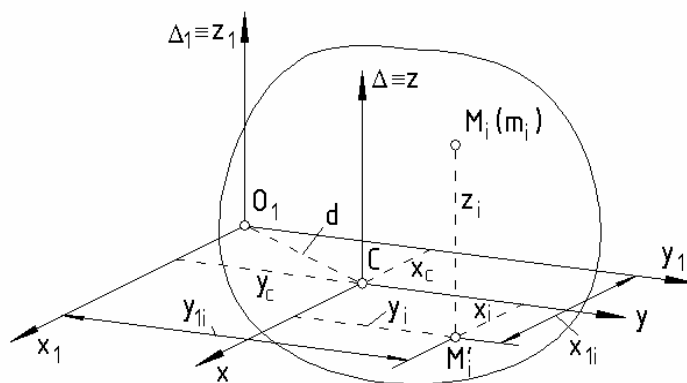


Fig. 9.2

Conform teoremei momentelor statice și ținând seama că  $C \in Oz$  ( $\xi = \eta = 0$ ) unde  $\xi$  și  $\eta$  sunt coordonatele punctului  $C$  în sistemul  $Cxyz$ , rezultă:

$$\sum_i m_i x_i = M\xi = 0, \quad \sum_i m_i y_i = M\eta = 0 \quad (9.26)$$

Introducând relațiile (9.25) și (9.26) în (9.24) se obține relația ce definește teorema Steiner:

$$J_{\Delta_l} = J_{\Delta} + Md^2 \quad (9.27)$$

*Momentul de inerție în raport cu o axă  $\Delta_l$  este egal cu momentul de inerție în raport cu o axă  $\Delta$  ce trece prin centrul de greutate al sistemului, paralelă cu axa  $\Delta_l$ , plus produsul dintre masa sistemului și pătratul distanței dintre cele două axe.*

În mod analog se demonstrează teorema Steiner referitoare la momentele de inerție centrifugale:

$$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} J_{x_l y_l} &= \sum_i m_i x_{li} y_{li} = \sum_i m_i (x_C + x_i)(y_C + y_i) = \\ &= x_C y_C \sum_i m_i + x_C \sum_i m_i y_i + y_C \sum_i m_i x_i + \sum_i m_i x_i y_i \end{aligned} \quad (9.28)$$

Introducând relațiile (9.25) și (9.26) în (9.28) rezultă:

$$J_{x_l y_l} = J_{xy} + Mx_C y_C \quad (9.29)$$

#### 9.1.1.5. VARIAȚIA MOMENTELOR DE INERȚIE ÎN RAPORT CU AXE CONCURENTE

Se consideră sistemul de puncte materiale  $M_i$  de mase  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) care față de sistemul de axe  $Oxyz$  are momentele de inerție axiale  $J_x, J_y, J_z$  și centrifugale,  $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$ , cunoscute.

Fie o axă  $\Delta$  care trece prin originea  $O$ , de versor  $\bar{u}$  și cosinusuri directoare,  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  (fig.9.3), în raport cu care se determină momentul de inerție axial  $J_{\Delta}$ .

$$\bar{u} = \cos\alpha \bar{i} + \cos\beta \bar{j} + \cos\gamma \bar{k} \quad (9.30)$$

Se consideră punctul  $M_i$  definit de vectorul de poziție  $\bar{r}_i$ :

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k} \quad (9.31)$$

Fie  $A_i$  proiecția lui  $M_i$  pe axa  $\Delta$

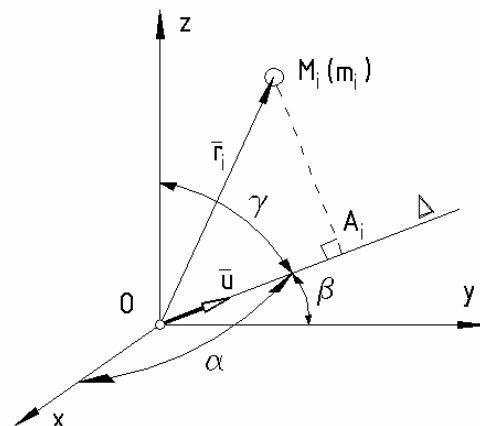


Fig. 9.3

și  $d_i = M_i A_i$ .

Prin definiție:

$$J_{\Delta} = \sum_i m_i d_i^2 \quad (9.32)$$

unde:

$$\begin{cases} d_i^2 = r_i^2 - (OA_i)^2 \\ r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ (OA_i)^2 = (\bar{r}_i \cdot \bar{u})^2 = (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2 \\ I = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \end{cases} \quad (9.33)$$

Introducând (9.33) în (9.32), rezultă:

$$\begin{aligned} J_{\Delta} &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) [\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - \\ &\quad - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2] = \\ &= \cos^2 \alpha \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \beta \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) + \\ &\quad + \cos^2 \gamma \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum_i m_i x_i y_i - \\ &\quad - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum_i m_i x_i z_i - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum_i m_i y_i z_i \end{aligned} \quad (9.34)$$

Considerând relațiile de definiție (9.5) și (9.9), care introduse în expresia (9.34) conduc la expresia momentului de inerție în raport cu o axă  $\Delta$ , în funcție de momentele de inerție axiale și centrifugale ale sistemului:

$$\begin{aligned} J_{\Delta} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - \\ &\quad - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (9.35)$$

*Caz particular: Sistemul plan [Oxy]*

$$z = 0, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \quad (9.36)$$

Introducând relațiile (9.36) în (9.35) se obține:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta \quad (9.37)$$

Notând:

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (9.38)$$

relația (9.37) devine:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - J_{xy} \sin 2\varphi \quad (9.39)$$

### 9.1.1.6. DIRECȚII PRINCIPALE DE INERȚIE. MOMENTE PRINCIPALE DE INERȚIE. PROPRIETĂȚI

Conform relației (9.35) momentul de inerție  $J_{\Delta}$  depinde de poziția axei  $\Delta$  față de triedrul de referință, prin cosinusurile directe ale acestuia:  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$ . În aplicații este important să se cunoască acele direcții ale axei  $\Delta$  pentru care momentul de inerție  $J_{\Delta}$  are valori extreme (minime sau maxime).

Axele care trec prin originea  $O$  și în raport cu care momentele de inerție au valori extreme (minime sau maxime), notate  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ , se numesc *axe principale de inerție*. Momentele de inerție în raport cu aceste axe se numesc *momente principale de inerție*, se notează  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  și se pot determina din studiul extremului funcției  $J_{\Delta}$  folosind *metoda multiplicatorilor Lagrange*.

Proprietățile cele mai importante ale axelor principale de inerție sunt:

1. *Axele principale de inerție formează un triedru triortogonal*
2. *Momentele de inerție centrifugale în raport cu axele principale de inerție sunt nule.*
3. *Pentru un sistem material sau rigid orice axă de simetrie este axă principală de inerție*
4. *Pentru un sistem material sau rigid care admite un plan de simetrie, orice axă normală pe acest plan este axă principală de inerție în punctul în care axa intersectează planul.*

**Aplicații. 1.** Să se determine momentele de inerție axiale în raport cu axele  $\Delta$  și  $\Delta_1$ , care trec prin centrul de greutate  $C$  și capătul  $O_1$  ale unei bare omogene de lungime  $l$  și masă  $m$  (fig.9.4).

*Rezolvare.* Conform relațiilor de definiție (9.2), momentele de inerție se determină discretizând bara în mase elementare și însumând produsele dintre aceste mase și pătratul distanțelor acestora față de reperul respectiv, sumă care la limită devine integrală pe domeniul ocupat de corp.

Corpul având o singură dimensiune, axa barei se consideră axa  $Ox$ , densitatea acestuia reprezentând masa distribuită pe unitatea de lungime  $\rho = m/l$

Masa elementară poate fi exprimată în funcție de lungimea elementară de bară  $dx$  și densitatea acesteia  $\rho$ .

$$dm = \rho dx = \frac{m}{l} dx$$

Momentul de inerție al masei elementare  $dm$  în raport cu axa  $\Delta$  (momentul de inerție elementar) este:

$$dJ_{\Delta} = x^2 dm = \frac{m}{l} x^2 dx$$

Momentul de inerție  $J_{\Delta}$  devine:

$$J_{\Delta} = \int_{(D)} dJ_{\Delta} = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12}$$

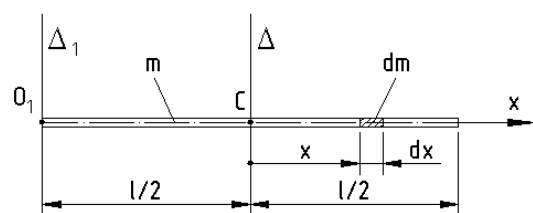


Fig. 9.4



Momentul de inerție al barei în raport cu axa  $\Delta_I$ , paralelă cu axa  $\Delta$ , la distanța  $d = l/2$  de aceasta, conform Teoremei Steiner (9.27) este:

$$J_{\Delta_I} = J_{\Delta} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + m\frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

2. Se dă placa dreptunghiulară de masă  $m$  având dimensiunile bazei  $b$  și ale înălțimii  $h$  ca în figura 9.5. Să se determine momentele de inerție axiale  $J_x$ ,  $J_y$  în raport cu axele  $Cx$ , respectiv  $Cy$  ce trec prin centrul de greutate  $C$ , momentul de inerție polar  $J_C$ , precum și momentele de inerție axiale  $J_{x_I}$ ,  $J_{y_I}$  în raport cu axele  $O_Ix$ , respectiv  $O_Iy$  ce trec prin extremitatea plăcii.

*Rezolvare.* Conform relațiilor de definiție, momentele de inerție se determină discretizând placa în mase elementare și însumând produsele dintre aceste mase și pătratul distanțelor acestora față de reperul respectiv, sumă care la limită devine integrală pe domeniul ocupat de corp.

Densitatea plăcii reprezintă masa distribuită pe unitatea de arie:

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{bh}$$

Masa elementară poate fi exprimată în funcție de laria elementară a plăcii,  $dA = dx \cdot dy$  și densitatea acesteia  $\rho$ .

$$dm = \rho dA = \rho dx dy = \frac{m}{bh} dx dy$$

Momentul de inerție al masei elementare  $dm$  în raport cu axa  $Cx$  (momentul de inerție elementar) este:

$$dJ_x = y^2 dm = \frac{m}{bh} y^2 dx dy$$

Momentul de inerție axial  $J_x$ , conform (9.12) devine:

$$J_x = \int_{(D)} dJ_x = \frac{m}{bh} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dx dy = \frac{m}{bh} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{m}{bh} x \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{m}{bh} b \frac{h^3}{12} = \frac{mh^2}{12}$$

În același mod se calculează momentul de inerție  $J_y$

$$J_y = \int_{(D)} dJ_y = \frac{m}{bh} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2 dx dy = \frac{m}{bh} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy = \frac{m}{bh} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{m}{bh} \frac{b^3}{12} h = \frac{mb^2}{12}$$

Momentul de inerție polar  $J_C$ , conform relației (9.14) este:

$$J_C = J_x + J_y = \frac{mh^2}{12} + \frac{mb^2}{12} = \frac{m(b^2 + h^2)}{12}$$

Momentele de inerție axiale  $J_{x_I}$ ,  $J_{y_I}$  în raport cu axele  $O_Ix$ , respectiv  $O_Iy$  ce trec prin extremitatea plăcii, paralele cu axele  $Cx$ , respectiv  $Cy$ , conform teoremei Steiner (9.27) sunt:

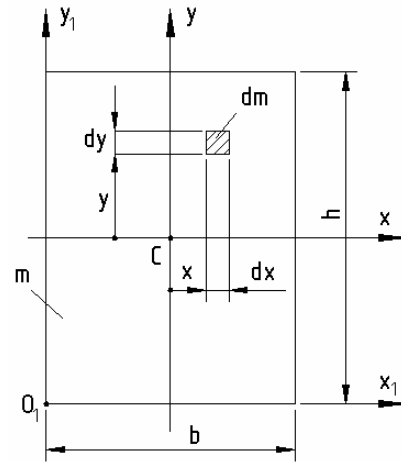


Fig. 9.5

$$J_{x_I} = J_x + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{mh^2}{12} + m\frac{h^2}{4} = \frac{mh^2}{3}$$

$$J_{y_I} = J_y + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{mb^2}{12} + m\frac{b^2}{4} = \frac{mb^2}{3}$$

3. Să se calculeze momentele de inerție axiale  $J_x$ ,  $J_y$  și polar  $J_0$  pentru un disc circular, omogen (fig.9.6) de masă  $m$  și rază  $R$ .

*Rezolvare.* Momentele de inerție se determină discretizând placa în mase elementare  $dm$  de arii elementare  $dA$ .

Densitatea plăcii reprezintă raportul dintre masa și aria acesteia:

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{\pi R^2}$$

Pentru facilitarea calculului se vor utiliza coordonatele polare: raza polară  $r$  și unghiul polar  $\theta$ .

Aria elementară devine:

$$dA = (r d\theta) \cdot dr = r dr d\theta$$

Masa elementară este:

$$dm = \rho dA = \frac{m}{\pi R^2} r dr d\theta$$

Poziția masei elementare  $dm$ , în raport cu cele două axe este definită de coordonatele  $x$  și  $y$  care sunt exprimate în funcție de coordonatele polare:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Momentele de inerție, elementare în raport cu axele  $Ox$  și  $Oy$  sunt:

$$\begin{cases} dJ_x = y^2 dm = r^2 \sin^2 \theta \frac{m}{\pi R^2} r dr d\theta = \frac{m}{\pi R^2} r^3 \sin^2 \theta dr d\theta = \frac{m}{2\pi R^2} r^3 (1 - \cos 2\theta) dr d\theta \\ dJ_y = x^2 dm = r^2 \cos^2 \theta \frac{m}{\pi R^2} r dr d\theta = \frac{m}{\pi R^2} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{m}{2\pi R^2} r^3 (1 + \cos 2\theta) dr d\theta \end{cases}$$

Momentele de inerție în raport cu cele două axe devin:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{(D)} dJ_x = \frac{m}{2\pi R^2} \left[ \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta - \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \frac{d2\theta}{2} \right] = \\ &= \frac{m}{2\pi R^2} \left[ \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \theta \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{m}{2\pi R^2} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{mR^2}{4} \\ J_y &= \int_{(D)} dJ_y = \frac{m}{2\pi R^2} \left[ \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \frac{d2\theta}{2} \right] = \\ &= \frac{m}{2\pi R^2} \left[ \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{m}{2\pi R^2} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{mR^2}{4} \end{aligned}$$

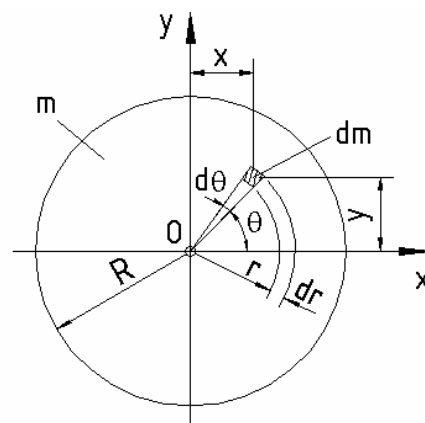


Fig. 9.6

Momentul de inerție polar  $J_0$ , conform relației (9.14) este:

$$J_0 = J_x + J_y = \frac{mR^2}{2}$$

4. Să se determine momentele de inerție axiale  $J_x, J_y, J_z$  ale unui cilindru circular drept, omogen de masă  $m$ , rază  $R$  și înălțime  $H$  (fig.9.7).

*Rezolvare.* Se discretizează cilindrul în mase elementare  $dm$  de forma unor discuri de rază  $R$  și înălțime  $dz$ , obținuți din intersecția cilindrului cu planele paralele cu planul  $Cxy$ :  $z$  și  $z+dz$

$$dm = \rho dV$$

$$\begin{cases} \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 H} \\ dV = \pi R^2 dz \end{cases}$$

$$dm = \frac{m}{\pi R^2 H} \pi R^2 dz = \frac{m}{H} dz$$

Momentele de inerție elementare ale discului în raport cu axele sistemului atașat acestuia  $O'x'y'z'$  devin:

$$dJ_{x'} = dJ_{y'} = \frac{R^2 dm}{4H} = \frac{mR^2}{4H} dz$$

$$dJ_{z'} = dJ_z = \frac{R^2 dm}{2H} = \frac{mR^2}{2H} dz$$

Momentele de inerție elementare ale discului în raport cu axele  $Cx$ , respectiv  $Cy$  ale sistemului ce trece prin centrul de greutate  $C$  al cilindrului, paralele cu axele  $O'x'$  și  $O'y'$  sunt conform teoremei Steiner:

$$dJ_x = dJ_{x'} + z^2 dm = \frac{mR^2}{4H} dz + z^2 \frac{m}{H} dz = \frac{m}{H} \left( \frac{R^2}{4} + z^2 \right) dz = dJ_y$$

Momentele de inerție axiale ale cilindrului în raport cu axele sistemului  $Cxyz$  sunt:

$$\begin{aligned} J_x = J_y &= \int_{(D)} dJ_x = \frac{m}{H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left( \frac{R^2}{4} + z^2 \right) dz = \frac{m}{H} \left[ \frac{R^2}{4} z \Big|_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} + \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \right] = \\ &= \frac{m}{H} \left( \frac{R^2 H}{4} + \frac{H^3}{12} \right) = \frac{m}{12} (3R^2 + H^2) \end{aligned}$$

$$J_z = \int_{(D)} dJ_z = \frac{mR^2}{2H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz = \frac{mR^2}{2H} z \Big|_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \frac{mR^2}{2H} H = \frac{mR^2}{2}$$

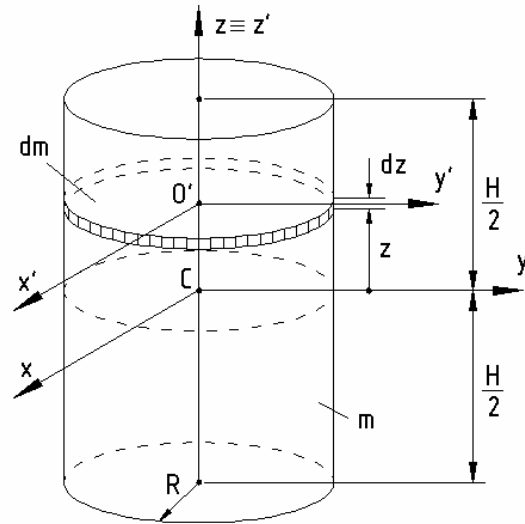


Fig. 9.7

5. Să se determine momentul de inerție al unui disc circular omogen de masă  $m$  și rază  $R$ , în raport cu axa  $\Delta$ , situată la distanța  $e$  centrul discului și înclinată față de planul discului cu unghiul  $\varphi$  (sau față de normala la planul discului cu unghiul,  $\pi/2 - \varphi$ ) (fig.9.8).

*Rezolvare.* Cunoscând momentele de inerție ale discului în raport cu axele principale și centrale de inerție  $Cx, Cy, Cz$ , se va determina mai întâi, momentul de inerție al discului în raport cu axa  $\Delta_C$ , paralelă cu axa  $\Delta$  conform relației de variație a momentelor de inerție în raport cu axe concurente, (9.35).

$$J_{\Delta C} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - \\ - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

unde:

$$\begin{cases} J_x = J_y = \frac{mR^2}{4}, J_z = \frac{mR^2}{2} \\ J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \varphi, \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi \end{cases}$$

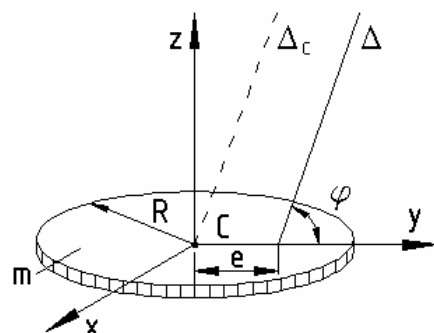


Fig. 9.8

Cu aceste notații, momentul de inerție  $J_{\Delta C}$  devine:

$$J_{\Delta C} = \frac{mR^2}{4} \cos^2 \varphi + \frac{mR^2}{2} \sin^2 \varphi = \frac{mR^2}{4} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) = \frac{mR^2}{4} (1 + \sin^2 \varphi)$$

Momentul de inerție în raport cu axa  $\Delta$ , paralelă cu axa  $\Delta_C$  se determină conform teoremei Steiner (9.27), distanța dintre cele două axe fiind  $d = e \sin \varphi$ .

$$J_{\Delta} = J_{\Delta C} + md^2 = \frac{mR^2}{4} (1 + \sin^2 \varphi) + me^2 \sin^2 \varphi = \frac{m}{4} [R^2 + (R^2 + 4e^2) \sin^2 \varphi]$$

### 9.1.2. LUCRUL MECANIC ELEMENTAR AL UNUI SISTEM DE FORȚE CARE ACȚIONEAZĂ ASUPRA RIGIDULUI

Se consideră un rigid în mișcarea generală, supus acțiunii unui sistem de forțe  $\vec{F}_i$ , (fig.9.9) care acționează în punctele  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). În timpul elementar  $dt$ , punctul  $M_i$  a cărui viteză dată de relația Euler (7.14):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

se deplasează cu distanța elementară:

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt = \vec{v}_0 dt + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt \quad (9.40)$$

Lucrul mecanic elementar al forței  $\vec{F}_i$  este:

$$dL_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i = \vec{F}_i \vec{v}_0 dt + \vec{F}_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt \quad (9.41)$$

Conform proprietății produsului mixt, prin permutări se obține:

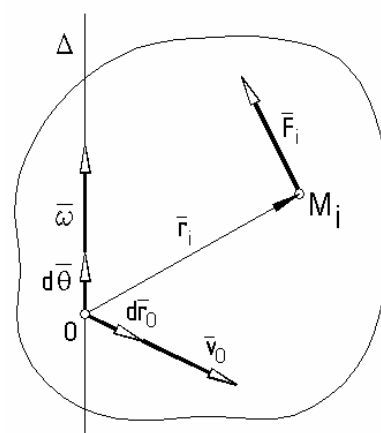


Fig. 9. 9

$$\bar{F}_i(\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \bar{\omega}(\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \quad (9.42)$$

Introducând relația (9.42) în (9.41) rezultă lucrul mecanic elementar al forței  $\bar{F}_i$ :

$$dL_i = \bar{F}_i \bar{v}_0 dt + \bar{\omega}(\bar{r}_i \times \bar{F}_i) dt \quad (9.43)$$

Cu notațiile:

-  $\bar{v}_0 dt = d\bar{r}_0$  - deplasarea elementară din mișcarea de translație a rigidului

-  $\bar{\omega} dt = d\bar{\theta}$  - rotirea elementară, considerată vector, din mișcarea de rotație a rigidului

-  $\bar{r}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_0(\bar{F}_i)$  - momentul în raport cu punctul  $O$  al forței  $\bar{F}_i$

relația (9.43) devine:

$$dL_i = \bar{F}_i d\bar{r}_0 + \bar{M}_0(\bar{F}_i) d\bar{\theta} \quad (9.44)$$

Pentru întreg sistemul de forțe  $\bar{F}_i$ , lucrul mecanic elementar devine:

$$dL = \sum_i dL_i = \sum_i \bar{F}_i d\bar{r}_0 + \sum_i \bar{M}_0(\bar{F}_i) d\bar{\theta} \quad (9.45)$$

Cum  $\sum_i \bar{F}_i = \bar{R}$  reprezintă forța rezultantă și  $\sum_i \bar{M}_0(\bar{F}_i) = \bar{M}_0$  reprezintă momentul rezultant, lucrul mecanic elementar al sistemului de forțe  $\bar{F}_i$  este:

$$dL = \bar{R} d\bar{r}_0 + \bar{M}_0 d\bar{\theta} \quad (9.46)$$

În cazul când originea sistemului mobil atașat corpului este centrul de greutate al acestuia  $O \equiv C$ , lucrul mecanic elementar al sistemului de forțe  $\bar{F}_i$  este:

$$dL = \bar{R} d\bar{r}_C + \bar{M}_C d\bar{\theta} \quad (9.47)$$

*Cazuri particulare:*

a. Rigid în mișcare de translație ( $\bar{\omega} = 0 \Rightarrow d\bar{\theta} = 0$ ):

$$dL = \bar{R} d\bar{r}_0 = R_x dx_0 + R_y dy_0 + R_z dz_0 \quad (9.48)$$

b. Rigid în mișcare de rotație ( $\bar{v}_0 = 0 \Rightarrow d\bar{r}_0 = 0$ ):

$$dL = \bar{M}_0 d\bar{\theta} = M_x d\theta_x + M_y d\theta_y + M_z d\theta_z \quad (9.49)$$

### 9.1.3. IMPULSUL

*Cazul sistemului material*

Fie un sistem de puncte materiale  $M_i$  cu mase  $m_i$  și viteze  $\bar{v}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Impulsul unui punct  $M_i$  din sistem este:

$$\bar{H}_i = m_i \bar{v}_i \quad (9.50)$$

iar pentru întreg sistemul material, impulsul devine:

$$\bar{H} = \sum_i m_i \bar{v}_i \quad (9.51)$$

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} \quad (9.52)$$

introducând relația (9.52) în (9.51) obținem:

$$\bar{H} = \sum_i m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \bar{r}_i = \frac{d}{dt} M\bar{r}_C = M\bar{v}_C \quad (9.53)$$

unde:

- $-\sum_i m_i \bar{r}_i = M\bar{r}_C$  - conform teoremei momentelor statice
- $-M = \sum_i m_i$  - reprezintă masa sistemului
- $-\bar{r}_C$  - este vectorul de poziție al centrului de greutate al sistemului

#### *Cazul rigidului*

Impulsul rigidului se obține prin însumarea la limită a impulsurilor maselor elementare  $dm$  pe domeniul ocupat de corp:

$$\bar{H} = \int_{(D)} \bar{v} dm = \int_{(D)} \frac{d\bar{r}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_{(D)} \bar{r} dm = \frac{d}{dt} M\bar{r}_C = M\bar{v}_C \quad (9.54)$$

unde:

- $-\int_{(D)} \bar{r} dm = M\bar{r}_C$  - conform teoremei momentelor statice
- $-M = \int_{(D)} dm$  - reprezintă masa rigidului
- $-\bar{r}_C$  - este vectorul de poziție al centrului de greutate al rigidului

*Impulsul unui sistem material sau rigid nu depinde de felul mișcării; se calculează considerând masa concentrată în centrul de greutate, în deplasarea cu viteza acestuia.*

### **9.1.4. MOMENTUL CINETIC**

#### *Cazul sistemului material*

Se consideră un sistem de puncte materiale  $M_i$  cu mase  $m_i$ , viteze  $\bar{v}_i$  și vectori de poziție în raport cu punctul fix  $O$ ,  $\bar{r}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Momentul cinetic al unui punct  $M_i$  este:

$$\bar{K}_{i0} = \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \quad (9.55)$$

iar pentru întregul sistem devine:

$$\bar{K}_0 = \sum_i \bar{K}_{i0} = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \quad (9.56)$$

### *Cazul rigidului*

Momentul cinetic al rigidului în raport cu un punct fix  $O_I$  se obține prin însumarea la limită a momentelor cinetice ale maselor elementare  $dm$  pe domeniul ocupat de corp:

$$\bar{K}_I = \int_{(D)} \bar{r}_I \times \bar{v} dm \quad (9.57)$$

Cum  $\bar{r}_I = \bar{r}_0 + \bar{r}$ , introducând această expresie în (9.57) obținem:

$$\bar{K}_I = \int_{(D)} (\bar{r}_0 + \bar{r}) \times \bar{v} dm = \int_{(D)} \bar{r}_0 \times \bar{v} dm + \int_{(D)} \bar{r} \times \bar{v} dm \quad (9.58)$$

unde:

$$\begin{aligned} \int_{(D)} \bar{r}_0 \times \bar{v} dm &= \bar{r}_0 \times \int_{(D)} \bar{v} dm = \bar{r}_0 \times \int_{(D)} \frac{d\bar{r}}{dt} dm = \bar{r}_0 \times \frac{d}{dt} \int_{(D)} \bar{r} dm = \\ &= \bar{r}_0 \times \frac{d}{dt} M\bar{r}_C = \bar{r}_0 \times M \frac{d\bar{r}_C}{dt} = \bar{r}_0 \times M\bar{v}_C \\ \int_{(D)} \bar{r} \times \bar{v} dm &= \bar{K}_0 \end{aligned} \quad (9.59)$$

în care  $\bar{K}_0$  reprezintă momentul cinetic al rigidului calculat în raport cu originea sistemului mobil atașat rigidului,  $O$ .

Din relațiile (9.58) și (9.59) obținem:

$$\bar{K}_I = \bar{r}_0 \times M\bar{v}_C + \bar{K}_0 \quad (9.60)$$

În cazul în care originea sistemului mobil atașat rigidului este centrul de greutate al acestuia  $O \equiv C$ , expresia momentului cinetic calculat în raport cu un punct fix  $O_I$  devine:

$$\bar{K}_I = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C \quad (9.61)$$

care exprimă *teorema Koenig* pentru momentul cinetic al rigidului în mișcare față de un reper fix.

*Momentul cinetic al unui rigid, în raport cu un punct fix este egal cu suma dintre momentul cinetic al unui punct material fictiv având masa corpului situat în centrul de greutate care se deplasează cu viteza acestuia și momentul cinetic al rigidului din mișcarea relativă față de centrul său de greutate.*

*Cazuri particulare:*

### **Rigid în mișcare de translație**

Specific mișcării de translație este viteza aceeași pentru toate punctele rigidului, egală cu viteza centrului de greutate  $\bar{v} = \bar{v}_C$ ; Considerând originea sistemului mobil atașat rigidului ca fiind centrul de greutate  $O \equiv C$ , aceasta implică  $\bar{r} = 0$  și  $\bar{K}_C = 0$  iar expresia (9.61) devine:

$$\bar{K}_I = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C = \bar{r}_C \times \bar{H} \quad (9.62)$$

*În mișcarea de translație, momentul cinetic se calculează ca și cum toată masa corpului ar fi concentrată în centrul de greutate și se deplasează cu viteza acestuia.*

### **Rigid în mișcare de rotație**

Considerând originile celor două sisteme de referință identice  $O_I \equiv O$ , deci  $\bar{r}_0 = 0$  și viteza unei mase elementare a rigidului  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ , unde  $\bar{\omega}$  și  $\bar{r}$  sunt exprimați prin proiecții pe axele sistemului mobil  $Oxyz$

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \\ \bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k} \end{cases} \quad (9.63)$$

expresia momentului cinetic al rigidului devine:

$$\begin{aligned} \bar{K}_0 &= \int_{(D)} \bar{r} \times \bar{v} dm = \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm = \int_{(D)} [r^2 \bar{\omega} - (\bar{r} \bar{\omega}) \bar{r}] dm = \\ &= \int_{(D)} [(x^2 + y^2 + z^2)(\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}) - \\ &\quad - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})] dm = \\ &= \int_{(D)} [(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z] dm \cdot \bar{i} + \\ &\quad + \int_{(D)} [-xy\omega_x + (x^2 + z^2)\omega_y - yz\omega_z] dm \cdot \bar{j} + \\ &\quad + \int_{(D)} [-xz\omega_x - yz\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z] dm \cdot \bar{k} \end{aligned}$$

Conform relațiilor de definiție, termenii din integrale reprezintă momentele de inerție axiale (9.6) și centrifugale (9.10) ale rigidului, astfel încât momentul cinetic se scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \bar{K}_0 &= (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) \bar{i} + (-J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z) \bar{j} + \\ &\quad + (-J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z) \bar{k} \end{aligned} \quad (9.64)$$

Din relația (9.64) rezultă expresiile componentelor pe axe ale momentului cinetic:

$$\begin{cases} K_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ K_y = -J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z \\ K_z = -J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z \end{cases} \quad (9.65)$$

### *Cazuri particulare*

1. Axa  $Oz$  coincide cu axa de rotație:

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \quad (9.66)$$



Introducând condiția (9.66) în (9.64) obținem:

$$\bar{K}_0 = -J_{xz}\omega\bar{i} - J_{yz}\omega\bar{j} + J_z\omega\bar{k} \quad (9.67)$$

2. Axa  $Oz$  coincide cu axa de rotație și este axă de simetrie a rigidului de revoluție:

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega; \quad J_{xz} = J_{yz} = 0 \quad (9.68)$$

Introducând condiția (9.68) în (9.64) obținem:

$$\bar{K}_0 = J_z\omega\bar{k} = J_z\bar{\omega} \quad (9.69)$$

### 9.1.5. ENERGIA CINETICĂ

*Cazul sistemului material*

Pentru un punct material  $M_i$  cu masa  $m_i$ , viteza  $\bar{v}_i$ , energia cinetică este:

$$E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (9.70)$$

Pentru un sistem de puncte materiale  $M_i$  cu mase  $m_i$ , viteze  $\bar{v}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), energia cinetică este:

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (9.71)$$

*Cazul rigidului*

În cazul rigidului prin discretizare la limită în mase elementare  $dm$  a căror viteze sunt  $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$ , expresia energiei cinetice este:

$$\begin{aligned} E &= \int_{(D)} \frac{1}{2} v^2 dm = \int_{(D)} \frac{1}{2} \bar{v}^2 dm = \int_{(D)} \frac{1}{2} (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm = \\ &= \int_{(D)} \frac{1}{2} \bar{v}_0^2 dm + \int_{(D)} \frac{1}{2} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm + \int_{(D)} \frac{1}{2} 2\bar{v}_0 (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm = \\ &= \int_{(D)} \frac{1}{2} |\bar{v}_0|^2 dm + \int_{(D)} \frac{1}{2} |\bar{\omega} \times \bar{r}|^2 dm + \bar{v}_0 \int_{(D)} \bar{\omega} \times \bar{r} dm = \\ &= \frac{1}{2} v_0^2 \int_{(D)} dm + \frac{1}{2} \int_{(D)} [|\bar{\omega}| |\bar{r}| \sin(\bar{\omega}, \bar{r})]^2 dm + \bar{v}_0 \bar{\omega} \times \int_{(D)} \bar{r} dm = \\ &= \frac{1}{2} v_0^2 \int_{(D)} dm + \frac{1}{2} \omega^2 \int_{(D)} l^2 dm + \bar{v}_0 \bar{\omega} \times M \bar{r}_C = \\ &= \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 + M \bar{v}_0 (\bar{\omega} \times \bar{r}_C) = \\ &= \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 + M \bar{v}_0 \bar{v}_{C0} = \frac{1}{2} M v_0^2 + E_0 + M \bar{v}_0 \bar{v}_{C0} \end{aligned} \quad (9.72)$$

În obținerea expresiei (9.72) s-au avut în vedere următoarele:

- $|\vec{r}| \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = l$  - reprezintă distanța elementului de masă  $dm$  la axa de rotație  $\Delta$  care trece prin  $O$
- $\int_{(D)} dm = M$  - este masa corpului
- $\int_{(D)} l^2 dm = J_{\Delta}$  - reprezintă momentul de inerție al corpului în raport cu axa  $\Delta$
- $-\vec{\omega}$  - viteza unghiulară care este un vector liber, deci o mărime constantă pentru domeniul de integrare  $(D)$  ocupat de corp
- $-\vec{\omega} \times \vec{r}_C = \vec{v}_{C0}$  - reprezintă viteza centrului de greutate  $C$  din mișcarea în raport cu originea  $O$  a sistemului mobil atașat corpului

În cazul în care originea sistemului mobil atașat rigidului este centrul de greutate al acestuia  $O \equiv C$  (un punct intrinsec al rigidului care nu depinde de sistemul de axe față de care este calculat), expresia energiei cinetice devine:

$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta C} \omega^2 = \frac{1}{2} M v_C^2 + E_C \quad (9.73)$$

care exprimă *teorema Koenig* pentru energia cinetică a rigidului în mișcare față de un reper fix.

*Energia cinetică a unui rigid, în mișcarea față de un sistem fix este egală cu suma dintre energia cinetică a unui punct material fictiv având masa corpului situat în centrul de greutate care se deplasează cu viteza acestuia și energia cinetică a rigidului din mișcarea relativă față de centrul de greutate.*

*Cazuri particulare*

### 1. Rigid în mișcare de translație

Considerând originea sistemului mobil ca fiind centrul de greutate  $O \equiv C$ , și viteza în mișcarea de translație fiind aceeași pentru toate punctele rigidului,  $\vec{v} = \vec{v}_0 = \vec{v}_C$  expresia energiei cinetice (9.73) devine:

$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 \quad (9.74)$$

### 2. Rigid în mișcare de rotație (cu axă fixă)

Pentru rigidul în mișcare de rotație în jurul unei axe  $\Delta$  care trece prin  $O_I \equiv O$ ,  $\vec{v}_0 = 0$ . Introducând această condiție în (9.72) rezultă:

$$E = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 \quad (9.75)$$

### 4. Rigid în mișcare plan paralelă

Considerând originea sistemului mobil în centrul de greutate al corpului  $O \equiv C$  și planul mișcării perpendicular pe axa instantanee de rotație adică  $\vec{v}_C \perp \vec{\omega}$ , expresia energiei cinetice este dată de relația (9.73):

$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \quad (9.76)$$

unde  $J_C$  reprezintă momentul de inerție al corpului în raport cu axa de rotație care trece prin  $C$ , perpendiculară pe planul mișcării.

În multe aplicații, mișcarea plan paralelă este tratată ca o rotație în jurul centrului instantaneu  $I$  și prin urmare, *energia cinetică a rigidului se va determina corespunzător mișcării de rotație*, momentul de inerție al corpului fiind  $J_I$ .

Conform teoremei Steiner, relația între momentele de inerție  $J_I$  și  $J_C$  este:

$$J_I = J_C + M(IC)^2 \Rightarrow J_C = J_I - M(IC)^2 \quad (9.77)$$

Din distribuția de viteze față de centrul instantaneu de rotație, viteza centrului de greutate  $C$  este:

$$\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \overline{IC} \Rightarrow |\bar{v}_C| = |\bar{\omega}| |\overline{IC}| \sin(\bar{\omega}, \overline{IC}) = \omega(IC) \quad (9.78)$$

unde:  $\bar{\omega} \perp \overline{IC} \Rightarrow \sin(\bar{\omega}, \overline{IC}) = 1$ ,  $(IC)$  reprezentând distanța de la centrul instantaneu de rotație  $I$ , la centrul de greutate al corpului  $C$ .

Înlocuind relațiile (9.77) și (9.78) în (9.76) obținem relația:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} M [\omega(IC)]^2 + \frac{1}{2} [J_I - M(IC)^2] \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} M \omega^2 (IC)^2 + \frac{1}{2} J_I \omega^2 - \frac{1}{2} M \omega^2 (IC)^2 = \frac{1}{2} J_I \omega^2 \end{aligned} \quad (9.79)$$

## 9.2. TEOREMELE GENERALE ÎN DINAMICA SISTEMELOR MATERIALE ȘI A RIGIDULUI

### 9.2.1. TEOREMA IMPULSULUI

Pentru un sistem material sau rigid, impulsul este definit de relația (9.50)

$$\bar{H} = \sum_i m_i \bar{v}_i$$

Derivând în raport cu timpul rezultă:

$$\dot{\bar{H}} = \sum_i m_i \dot{\bar{v}}_i = \sum_i m_i \bar{a}_i \quad (9.80)$$

Pentru punctul material  $M_i$  de masă  $m_i$  din sistem, legea fundamentală devine:

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i + \sum_j \bar{F}_{ij} \quad (9.81)$$

Însumând pe întregul sistem material obținem:

$$\sum_i m_i \bar{a}_i = \sum_i \bar{F}_i + \sum_i \sum_j \bar{F}_{ij} \quad (9.82)$$

unde:  $\sum_i \bar{F}_i = \bar{R}$  reprezintă rezultanta forțelor exterioare sistemului,  $\sum_i \sum_j \bar{F}_{ij}$  reprezintă rezultanta forțelor interioare sistemului.

Conform principiului acțiunii și reacțiunii:

$$\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji} \Rightarrow \sum_i \sum_j \bar{F}_{ij} = 0 \quad (9.83)$$

Introducând relațiile (9.82) și (9.83) în (9.81) se obține expresia ce exprimă teorema impulsului în cazul sistemului material sau rigid:

$$\dot{\bar{H}} = \bar{R} \quad (9.84)$$

*Derivata în raport cu timpul a impulsului unui sistem material sau rigid este egală cu rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra sistemului sau rigidului.*

Proiectând pe axe relația vectorială (9.84) se obține:

$$\dot{H}_x = R_x, \quad \dot{H}_y = R_y, \quad \dot{H}_z = R_z \quad (9.85)$$

*Derivata în raport cu timpul a proiecției pe o axă a impulsului unui sistem material sau rigid este egală cu proiecția pe aceea axă a rezultantei forțelor exterioare care acționează asupra sistemului sau rigidului.*

### 9.2.1.1. TEOREMA MIȘCĂRII CENTRULUI DE MASĂ (GREUTATE) AL UNUI SISTEM MATERIAL SAU RIGID

Impulsul unui sistem material sau rigid, conform (9.53) este:

$$\bar{H} = M\bar{v}_C$$

care derivată în raport cu timpul conduce la:

$$\dot{\bar{H}} = M\dot{\bar{v}}_C = M\bar{a}_C \quad (9.86)$$

Din relațiile (9.84) și (9.86) rezultă;

$$M\bar{a}_C = \bar{R} \quad (9.87)$$

și exprimă teorema mișcării centrului de greutate al unui sistem material sau rigid.

*Centrul de greutate al unui sistem material sau rigid se deplasează ca un punct în care este concentrată întreaga masă a sistemului (rigidului) și asupra căruia acționează rezultanta forțelor exterioare.*

Se subliniază că teorema impulsului și teorema mișcării centrului de masă nu sunt teoreme independente, teorema mișcării centrului de masă reprezentând o altă formă de prezentare a teoremei impulsului.

*Conservarea impulsului*

Dacă în timpul mișcării sistemul material sau rigidul este izolat, atunci:

$$\bar{R} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{H}} = 0; \bar{H} = M\bar{v}_C = \bar{C} \quad (9.88)$$

*Dacă sistemul sau rigidul este izolat, atunci impulsul se conservă adică are o valoare constantă care se determină din condițiile inițiale ale mișcării.*

În multe cazuri, rezultanta forțelor exterioare are nulă, componenta după o axă, ceea ce conduce la conservarea impulsului după acea axă.

Astfel, dacă:

$$R_x = 0 \Rightarrow \dot{H}_x = 0; H_x = Mv_{xC} = C \quad (9.89)$$

*Dacă proiecția pe o axă a rezultantei forțelor exterioare este nulă, atunci proiecția impulsului pe axa respectivă se conservă adică are o valoare constantă care se determină din condițiile inițiale ale mișcării.*

### 9.2.2. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC

*Cazul mișcării absolute a sistemului material sau a rigidului în raport cu un reper fix.*

Pentru un sistem material sau rigid, momentul cinetic calculat în raport cu un punct fix  $O$ , conform relației (9.55) este:

$$\bar{K}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$$

Derivând în raport cu timpul această relație se obține:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \sum_i \dot{\bar{r}}_i \times m_i \bar{v}_i + \sum_i \bar{r}_i \times m_i \dot{\bar{v}}_i = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i \quad (9.90)$$

întrucât:  $\sum_i \dot{\bar{r}}_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_i \bar{v}_i \times m_i \bar{v}_i = 0$  reprezintă un produs vectorial cu vectori coliniari

Conform relației (9.81):

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i + \sum_j \bar{F}_{ij}$$

care introdusă în (9.90) se obține:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i = \sum_i \bar{r}_i \times (\bar{F}_i + \sum_j \bar{F}_{ij}) = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum_i \sum_j \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} \quad (9.91)$$

Se notează:

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i &= \sum_i \bar{M}_0(\bar{F}_i) = \bar{M}_0 \\ \sum_i \sum_j \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} &= \sum_i \sum_j \bar{M}_0(\bar{F}_{ij}) = 0 \end{aligned} \quad (9.92)$$

unde  $\bar{M}_0(\bar{F}_i)$  reprezintă momentul în raport cu punctul  $O$  al forțelor exterioare sistemului și  $\bar{M}_0(\bar{F}_{ij})$  reprezintă momentul în raport cu punctul  $O$  al forțelor interioare sistemului și care este nul deoarece momentul în raport cu acest punct al fiecărei perechi de forțe interioare este nul.

Introducând (9.92) în (9.91) rezultă expresia vectorială a teoremei momentului cinetic:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0 \quad (9.93)$$

*Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui sistem material sau rigid, calculat în raport cu un punct fix  $O$  este egală cu momentul resultant al forțelor exterioare sistemului sau rigidului, calculat în raport cu același punct.*

*Cazul mișcării relative a sistemului material sau a rigidului în raport cu centrul de greutate (al maselor).*

În cazul în care originea sistemului mobil atașat rigidului este centrul de greutate al acestuia  $O \equiv C$ , expresia momentului cinetic calculat în raport cu un punct fix  $O_I$ , conform relației (9.61) este:

$$\bar{K}_I = \bar{K}_C + \bar{r}_C \times M\bar{v}_C$$

care exprimă *teorema Koenig* pentru momentul cinetic al rigidului în mișcare față de un reper fix.

Momentul în raport cu punctul fix  $O_I$  al forțelor care acționează asupra rigidului este:

$$\bar{M}_I(\bar{F}_i) = \sum_i \bar{r}_{Ii} \times \bar{F}_i \quad (9.94)$$

unde:  $\bar{r}_{Ii} = \bar{r}_C + \bar{r}_i$

Teorema momentului cinetic devine:

$$\dot{\bar{K}}_I = \bar{M}_I(\bar{F}_i) \quad (9.95)$$

respectiv:

$$\frac{d}{dt} [\bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{K}_C] = \sum_i (\bar{r}_C + \bar{r}_i) \times \bar{F}_i$$

adică:

$$\dot{\bar{r}}_C \times M\bar{v}_C + \bar{r}_C \times M\dot{\bar{v}}_C + \dot{\bar{K}}_C = \bar{r}_C \times \sum_i \bar{F}_i + \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i \quad (9.96)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}}_C \times M\bar{v}_C = \bar{v}_C \times M\bar{v}_C = 0 \\ \bar{r}_C \times M\dot{\bar{v}}_C = \bar{r}_C \times M\bar{a}_C = \bar{r}_C \times \sum_i \bar{F}_i \\ \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_C(\bar{F}_i) = \bar{M}_C \end{cases} \quad (9.97)$$

Introducând relațiile (9.97) în (9.96) rezultă:

$$\dot{\bar{K}}_C = \bar{M}_C \quad (9.98)$$

care exprimă *teorema momentului cinetic din mișcarea rigidului în raport cu centrul de greutate.*

*Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui sistem material sau rigid în mișcarea relativă față de centrul de greutate C, calculat în raport cu acest punct este egală cu momentul rezultat al forțelor exterioare rigidului, calculat în raport cu același punct.*

*Teorema momentului cinetic păstrează aceeași formă în mișcarea relativă față de centrul de greutate ca și în mișcarea față de un punct fix.*

Proiectând pe axe relația vectorială (9.93) se obține:

$$\dot{K}_x = M_x, \quad \dot{K}_y = M_y, \quad \dot{K}_z = M_z \quad (9.99)$$

*Derivata în raport cu timpul a proiecției pe o axă a momentului cinetic al unui sistem material sau rigid calculat în raport cu un punct fix O este egală cu proiecția pe acea axă a momentului rezultat al forțelor exterioare care acționează asupra sistemului sau rigidului, calculat în raport cu același punct.*

*Conservarea momentului cinetic*

Dacă în timpul mișcării sistemul material sau rigidul este izolat, atunci:

$$\bar{M}_0 = 0 \Rightarrow \dot{\bar{K}}_0 = 0; \quad \bar{K}_0 = \bar{C} \quad (9.100)$$

*Dacă sistemul sau rigidul este izolat, atunci momentul cinetic se conservă adică are o valoare constantă care se determină din condițiile inițiale ale mișcării.*

Sunt situații când momentul rezultat al forțelor exterioare are nulă doar componenta după o axă, ceea ce conduce la conservarea momentului cinetic după acea axă. Astfel, dacă:

$$M_x = 0 \Rightarrow \dot{K}_x = 0; \quad K_x = C \quad (9.101)$$

*Dacă proiecția pe o axă a momentului rezultat al forțelor exterioare este nulă, atunci proiecția momentului cinetic pe axa respectivă se conservă adică are o valoare constantă care se determină din condițiile inițiale ale mișcării.*

### 9.2.3. TEOREMA ENERGIEI CINETICE

*Cazul mișcării absolute a sistemului material sau a rigidului în raport cu un reper fix.*

Pentru un sistem material, energia cinetică este dată de relația (9.71):

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Diferențiind expresia (9.71) obținem:

$$\begin{aligned} dE &= d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \frac{1}{2} \sum_i m_i d(v_i^2) = \\ &= \sum_i m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i dt \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \sum_i m_i \bar{a}_i d\bar{r}_i \end{aligned} \quad (9.102)$$

Se consideră sistemul material acționat în punctele  $M_i$  de forțele exterioare  $\vec{F}_i$  și forțele interioare  $\vec{F}_{ij}$ . Pentru punctul material  $M_i$  de masă  $m_i$ , legea fundamentală este dată de relația (9.81):

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

Înmulțind relația (9.81) cu variația vectorului de poziție al masei  $m_i$ ,  $d\vec{r}_i$  și însumând pentru toate punctele din sistem obținem:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i d\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i d\vec{r}_i + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i \quad (9.103)$$

$$\sum_i \vec{F}_i d\vec{r}_i = dL(\vec{F}_i) = dL_{ext}; \quad \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i = dL(\vec{F}_{ij}) = dL_{int} \quad (9.104)$$

unde  $dL_{ext}$  și  $dL_{int}$  reprezintă lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare, respectiv interioare sistemului.

Introducând relațiile (9.103) și (9.104) în (9.102) rezultă *teorema energiei cinetice – forma diferențială* - pentru un sistem material:

$$dE = dL_{ext} + dL_{int} \quad (9.105)$$

*Variația energiei cinetice în timpul elementar  $dt$  este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și interioare sistemului efectuat în același interval de timp.*

Vor fi analizate cazurile posibile când lucrul mecanic elementar al forțelor interioare este nul:

$$dL_{int} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i = 0 \quad (9.106)$$

Pentru simplificare se consideră cazul unei perechi de forțe interioare  $\vec{F}_{ij}$  și  $\vec{F}_{ji}$  care acționează punctele materiale  $M_i$  și  $M_j$  ale sistemului (fig.9.10).

$$dL_{int} = \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} d\vec{r}_j = \vec{F}_{ij} (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \vec{F}_{ij} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) dt = \vec{F}_{ij} \vec{v}_{ij} dt \quad (9.107)$$

deoarece:  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ,  $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ ,  $\vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{v}_{ij}$  iar  $\vec{v}_{ij}$  reprezintă viteza relativă din mișcarea punctului  $M_i$  față de  $M_j$  ca și când acesta ar fi fix; deci  $\vec{v}_{ij} \perp \overline{M_i M_j}$ .

*Cazurile când  $dL_{int} = 0$ :*

- $\vec{F}_{ij} = 0$  - în legătura dintre două puncte materiale nu se manifestă forțele de legătură interioare;
- $\vec{v}_{ij} = 0$  - viteza relativă dintre puncte este nulă;
- $\vec{F}_{ij} \perp \vec{v}_{ij}$  - vectorii  $\vec{F}_{ij}$  și  $\vec{F}_{ji}$  sunt perpendiculari, ca în cazul a două corpuri legate printr-un fir

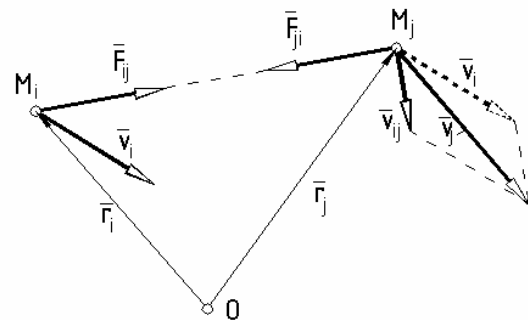


Fig. 9.10



inextensibil, perfect întins; este cazul rigidului.

În cazul rigidului, teorema energiei cinetice - forma diferențială este:

$$dE = dL_{ext} \quad (9.108)$$

*Variația energiei cinetice în timpul elementar  $dt$  este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor care acționează asupra rigidului, efectuat în același interval de timp.*

*Teorema energiei cinetice – forma integrală (finită) se obține prin integrarea formei diferențiale (9.108) în intervalul de timp  $(t_0, t_1)$ .*

$$E_1 - E_0 = L_{01ext} \quad (9.109)$$

*Variația energiei cinetice din poziția inițială în poziția finală este egală cu lucrul mecanic al forțelor care acționează asupra rigidului, efectuat între cele două poziții (în intervalul de timp  $t_0, t_1$ ).*

*Conservarea energiei mecanice*

*Un sistem material este conservativ dacă forțele interioare sistemului derivă dintr-o funcție de forță  $U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ , adică:*

$$dL_{int} = dU \quad (9.110)$$

Dacă se introduce noțiunea de energie potențială, definită ca în cazul punctului material  $U = -V$  atunci relația (9.110) devine:

$$dL_{int} = -dV \quad (9.111)$$

Introducând relația (9.111) în (9.105) se obține:

$$dE = dL_{ext} - dV \Rightarrow d(E + V) = dL_{ext} \quad (9.112)$$

Dacă:

$$dL_{ext} = 0 \Rightarrow d(E + V) = 0 \Rightarrow E + V = \text{const.} \quad (9.113)$$

care constituie *teorema conservării energiei mecanice*:

*Dacă lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare care acționează asupra unui sistem conservativ este nul într-un interval de timp dat, energia mecanică a sistemului se conservă, adică este constantă în acel interval de timp sau un sistem conservativ închis are energia mecanică constantă.*

*Cazul mișcării relative a sistemului material sau a rigidului în raport cu centrul de greutate (al maselor).*

Când originea sistemului mobil atașat rigidului este centrul de greutate al acestuia  $O \equiv C$ , expresia energiei cinetice devine conform relației (9.73):

$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 + E_C$$

care exprimă *teorema Koenig* pentru energia cinetică a rigidului în mișcare față de un reper fix.

Tot în acest caz, lucrul mecanic elementar al sistemului de forțe  $\bar{F}_i$ , conform (9.47) este:

$$dL = \bar{R}d\bar{r}_C + \bar{M}_C d\bar{\theta} = \bar{R}d\bar{r}_C + dL_C$$

Teorema energiei cinetice, conform (9.108) este:

$$dE = dL$$

Diferențiind expresia (9.73) se obține:

$$\begin{aligned} dE &= d\left(\frac{1}{2}Mv_C^2 + E_C\right) = d\left(\frac{1}{2}M\bar{v}_C^2 + E_C\right) = \\ &= M\bar{v}_C d\bar{v}_C + dE_C = M\bar{v}_C dt \frac{d\bar{v}_C}{dt} + dE_C = \\ &= M\bar{a}_C d\bar{r}_C + dE_C = \bar{R}d\bar{r}_C + dE_C \end{aligned} \quad (9.114)$$

Introducând expresiile (9.114) și (9.47) în (9.108) rezultă:

$$dE_C = dL_C \quad (9.115)$$

care exprimă *teorema energiei cinetice din mișcarea rigidului în raport cu centrul de greutate*.

*Variația energiei cinetice a rigidului în mișcarea față de centrul de greutate, în timpul elementar  $dt$  este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare care acționează asupra rigidului, efectuat în același interval de timp.*

*Teorema energiei cinetice păstrează aceeași formă în mișcarea relativă față de centrul de greutate ca și în mișcarea față de un punct fix.*

*Conservarea energiei mecanice*

Dacă forțele care acționează asupra rigidului sunt conservative, adică derivă dintr-o funcție de forță  $U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ :

$$dL_C = dU \quad (9.116)$$

Folosind noțiunea de energie potențială  $U = -V$ , relația (9.116) devine:

$$dL_C = -dV \quad (9.117)$$

Introducând relația (9.117) în (9.115) se obține:

$$dE_C = -dV \Rightarrow d(E_C + V) = 0 \Rightarrow E_C + V = \text{const.} \quad (9.118)$$

*Dacă forțele care acționează asupra unui rigid sunt forțe conservative, energia mecanică a rigidului în mișcarea relativă față de centrul de greutate se conservă, adică are o valoare constantă care se determină din condițiile inițiale ale mișcării.*

*Observație.* Teoremele impulsului, momentului cinetic și energiei cinetice se aplică numai cu vitezele absolute.

**Aplicații. 1.** Înaintea operației de descărcare la cheu a unei nave, centrele de greutate ale containerului și brațului macaralei sunt pe aceeași verticală cu centrul de greutate al navei. (fig.9.11.a). Să se determine deplasarea  $d_l$  a navei (fig.9.11.b) la sfârșitul operației de descărcare a containerului de greutate  $P_3$ , când brațul macaralei de greutate  $P_2$  și lungime  $l$  formează unghiul  $\alpha$  cu orizontala, dacă greutatea navei este  $P_1$  și rezistența apei neglijabilă.

*Rezolvare.* Conform teoremei mișcării centrului de greutate (de masă) se scrie:

$$M\bar{a}_C = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{F}_a$$

unde  $\bar{F}_a$  este forța Arhimede.

Cum toate forțele care acționează asupra navei au direcție verticală, din proiecția ecuației vectoriale pe direcția orizontală a mișcării navei (axa  $Ox$ ), rezultă:

$$Ma_{xC} = M\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0, \dot{x}_C = C_1, x_C = C_1t + C_2$$

Constantele de integrare  $C_1, C_2$  se determină din condițiile inițiale (la momentul  $t = 0$ ). În acest moment atât viteza cât și deplasarea navei sunt nule, adică:

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_C(0) = 0 \\ x_C(0) = 0 \end{cases}$$

Introducând aceste condiții în expresiile vitezei și mișcării navei, rezultă  $C_1 = C_2 = 0$ . Prin urmare centrul de greutate al sistemului nu se deplasează pe orizontală în timpul operației de descărcare a navei.

$$x_C = 0$$

Din Statică se cunoaște expresia abscisei centrului de greutate al unui sistem material:

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \frac{P_i}{g} x_i}{\sum_i \frac{P_i}{g}} = \frac{\sum_i P_i x_i}{\sum_i P_i}$$

adică:

$$x_C = \frac{P_1 d_1 + P_2(-d_2) + P_3(-d_3)}{P_1 + P_2 + P_3}$$

În raport cu sistemul de referință ales, distanțele au următoarele semnificații:  $d_1$  este deplasarea centrului de greutate al navei,  $d_2 = \frac{l}{2} \cos \alpha - d_1$  este deplasarea centrului de greutate al brațului iar  $d_3 = l \cos \alpha - d_1$  reprezintă deplasarea centrului de greutate al containerului.

Introducând valorile distanțelor și punând condiția de imobilitate al centrului de greutate al sistemului obținem:

$$\frac{P_1 d_1 - P_2 d_2 - P_3 d_3}{P_1 + P_2 + P_3} = 0 \Rightarrow P_1 d_1 - P_2 \left( \frac{l}{2} \cos \alpha - d_1 \right) - P_3 (l \cos \alpha - d_1) = 0$$

de aici, expresia deplasării navei:

$$d_1 = \frac{P_2 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3} l \cos \alpha$$

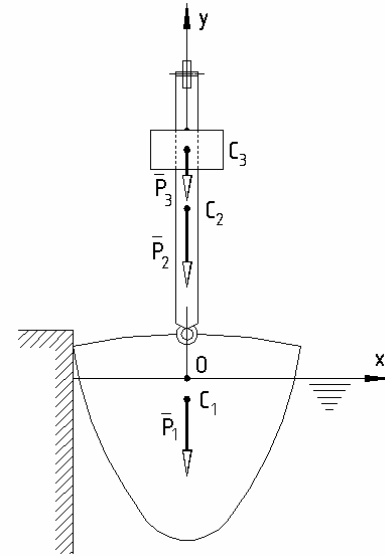


Fig. 9.11.a

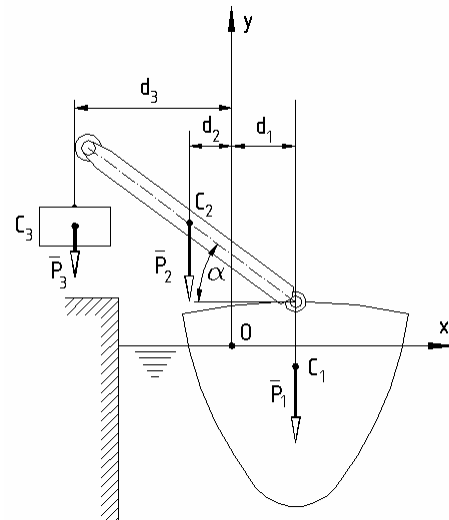


Fig. 9.11.b

**2.** O roată de rază  $r$  și greutate  $G$  care se rotește cu viteza unghiulară  $\omega_0$  în jurul axului  $O$  este apăsată cu un sabot de frână cu forța radială  $N$ . La momentul  $t = t_1$  secunde, roata se

oprește datorită frecării (fig.9.12). Să se determine coeficientul de frecare  $\mu$  dintre sabot și roată precum și numărul de rotații  $n$  efectuate de aceasta până la oprire.

*Rezolvare.* Roata fiind în mișcare de rotație legea de mișcare  $\theta = \theta(t)$  se obține aplicând teorema momentului cinetic calculat în raport cu punctul  $O$  și proiectată pe direcția și în sensul mișcării (în planul roții - sensul orar).

$$\begin{cases} \frac{dK_0}{dt} = M_0 \\ K_0 = J_0 \omega = \frac{Gr^2}{2g} \omega \\ \frac{dK_0}{dt} = \frac{Gr^2}{2g} \dot{\omega} = \frac{Gr^2}{2g} \varepsilon \\ M_0 = -F_f r = -\mu N r \end{cases}$$

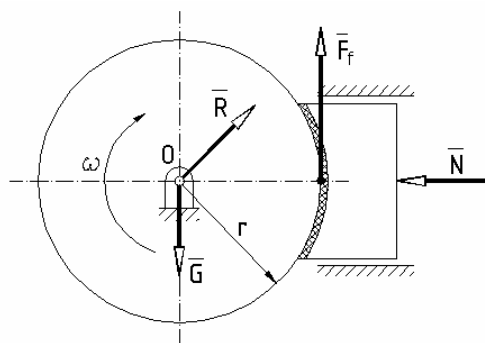


Fig. 9.12

$$\frac{Gr^2}{2g} \varepsilon = -\mu N r \Rightarrow \varepsilon = -\frac{2\mu g N}{Gr}$$

Caracteristicile în timp ale mișcării roții sunt:

$$\begin{cases} \omega = \varepsilon t + C_1 \\ \theta = \varepsilon \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \end{cases}$$

Constantele de integrare se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$$t = 0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \theta(0) = 0$$

Introducând aceste condiții în sistemul de ecuații, se obțin valorile constantelor:

$$C_1 = \omega_0, \quad C_2 = 0$$

Caracteristicile mișcării roții devin:

$$\begin{cases} \omega = \varepsilon t + \omega_0 \\ \theta = \varepsilon \frac{t^2}{2} + \omega_0 t \end{cases}$$

Coeficientul de frecare  $\mu$  dintre sabot și roată precum și numărul de rotații  $n$  efectuate de aceasta până la oprire se determină din condițiile finale ale mișcării:

$$t = t_1, \quad \omega(t_1) = 0, \quad \theta(t_1) = 2\pi n$$

Introducând aceste condiții și expresia accelerației unghiulare în sistemul de ecuații de mai sus se obține un sistem de două ecuații cu necunoscutele  $\mu$  și  $n$ :

$$\begin{cases} -\frac{2\mu g N}{Gr} t_1 + \omega_0 = 0 \\ -\frac{\mu g N}{Gr} t_1^2 + \omega_0 t_1 = 2\pi n \end{cases}$$

și ale căror valori sunt:

$$\mu = \frac{Gr\omega_0}{2gNt_1}, \quad n = \frac{\omega_0 t_1}{4\pi}$$

3. Paletul  $A$  de greutate  $P$  este depozitat într-o magazie cu ajutorul benzii transportoare din figura 9.13. Dacă roțile motoare și condusă, au aceeași rază  $R$  și moment de inerție  $J$ , roata motoare fiind acționată de cuplul motor  $M$  să se studieze mișcarea sistemului.

*Rezolvare.* Sistemul este alcătuit din corpuri în mișcare de translație și rotație, caracterizate de legile de mișcare  $s = s(t)$  și  $\theta = \theta(t)$ . Inexistența alunecării între palet - bandă și bandă - roți, conduce la următoarele relații cinematice între parametrii mișcării celor două categorii de corpuri:

$$s = R\theta, \dot{s} = R\dot{\theta}, \ddot{s} = R\ddot{\theta}$$

Mișcarea sistemului poate fi exprimată în funcție de mișcarea unuia din cele două categorii de corpuri, spre exemplu mișcarea roții motoare, definită de accelerația unghiulară  $\varepsilon = \ddot{\theta}$ .

Sistemul are un singur grad de libertate și prin urmare, legea de mișcare poate fi definită utilizând teorema energiei cinetice – forma diferențială:

$$dE = dL_{ext}$$

$E$  reprezintă energia cinetică a întregului sistem iar  $dL_{ext}$  este lucrul mecanic elementar ale forțelor și cuplurilor exterioare sistemului. Se are în vedere faptul că energia cinetică este o mărime strict pozitivă în timp ce lucrul mecanic poate fi pozitiv (*lucrul mecanic motor*) sau negativ (*lucrul mecanic rezistent*), după cum forța și cuplul are sensul direct sau contrar al mișcării.

$$E = E_{O1} + E_{O2} + E_A = 2E_I + E_A = 2\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}s^2 = J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2g}(2gJ + PR^2)\dot{\theta}^2$$

$$dE = \frac{1}{g}(2gJ + PR^2)\dot{\theta}d\dot{\theta}$$

$$dL_{ext} = M \cdot d\theta - P \sin \alpha \cdot ds = M \cdot d\theta - P \sin \alpha \cdot R d\theta = (M - PR \sin \alpha) d\theta$$

Introducând valorile celor doi termeni în expresia teoremei energiei cinetice obținem:

$$\frac{1}{g}(2gJ + PR^2)\dot{\theta}d\dot{\theta} = (M - PR \sin \alpha)d\theta$$

Împărțind ambii termeni ai relației prin timpul elementar  $dt$ , rezultă:

$$\frac{1}{g}(2gJ + PR^2)\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{dt} = (M - PR \sin \alpha)\frac{d\theta}{dt}$$

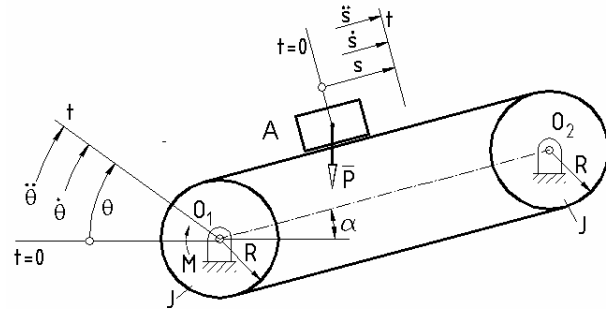


Fig. 9.13

Introducând derivatele în raport cu timpul sub forma  $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ , respectiv  $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta}$  și simplificând relația prin  $\dot{\theta}$ , obținem mișcarea sistemului definită prin accelerația unghiulară a roții motoare  $\varepsilon = \ddot{\theta}$ :

$$\varepsilon = \ddot{\theta} = \frac{M - PR \sin \alpha}{2gJ + PR^2} g$$

4. Un pendul fizic de greutate  $P$  oscilează în jurul axei orizontale  $AB$ , având planul de simetrie perpendicular pe axă (fig.9.14). Se dau: momentul de inerție  $J_0$  al pendulului în

181

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{Pl}{J_0} \cos \varphi + C$$

Constanta de integrare  $C$  se determină din condițiile inițiale de poziție și viteză:

$$t = 0, \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$$

Rezultă:

$$C = -\frac{Pl}{J_0} \cos \varphi_0$$

$$\omega^2 = \dot{\varphi}^2 = 2\frac{Pl}{J_0}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

Introducând expresiile celor două mărimi în sistemele de ecuații menționate anterior se obține următorul sistem de ecuații:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\frac{P^2 l^2}{gJ_0}(\cos \varphi - \cos \varphi_0) = P \cos \varphi + H_A + H_B \\ -\frac{P^2 l^2}{gJ_0} \sin \varphi = -P \sin \varphi + V_A + V_B \\ 0 = -V_A a + V_B b \\ 0 = H_A a - H_B b \end{array} \right.$$

și de aici expresiile reacțiunilor, după cum urmează:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A = \frac{b}{a+b} \frac{P}{gJ_0} [2Pl^2 \cos \varphi_0 - (2Pl^2 + gJ_0) \cos \varphi] \\ H_B = \frac{a}{a+b} \frac{P}{gJ_0} [2Pl^2 \cos \varphi_0 - (2Pl^2 + gJ_0) \cos \varphi] \\ V_A = \frac{b}{a+b} \frac{P}{gJ_0} (gJ_0 - Pl^2) \sin \varphi \\ V_B = \frac{a}{a+b} \frac{P}{gJ_0} (gJ_0 - Pl^2) \sin \varphi \end{array} \right.$$

## TEST DE EVALUARE

- Momentul de inerție polar reprezintă:
  - Suma momentelor de inerție planare
  - Suma momentelor de inerție axiale
  - Suma momentelor de inerție centrifugale
- Expresia  $J_A = J_{AC} + md^2$  exprimă:
  - teorema Steiner
  - variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele
  - variația momentelor de inerție în raport cu axe concurente
- Axele principale de inerție sunt:
  - axe care trec prin centrul de greutate și în raport cu care momentele de inerție sunt maxime

- b. axe în raport cu care momentele centrifugale sunt nule
  - c. axe în raport cu care momentele de inerție au valori extreme
4. Lucrul mecanic al unui sistem de forțe care acționează asupra corpului în mișcarea generală este dat de:
- a. numai de forțele care imprimă corpului o mișcare de translație
  - b. numai de momentele forțelor, respectiv cuplurile care imprimă corpului o mișcare de rotație
  - c. a. și b.
5. Impulsul unui sistem material sau rigid se calculează ca și când acestea ar fi un punct
- a. de masă egală cu masa corpului sau sistemului, situat în centrul de greutate  $C$  și care se deplasează cu viteza acestuia,  $v_C$
  - b. de masă egală cu masa corpului sau sistemului, situat în originea sistemului de axe atașat,  $O$  și care se deplasează cu viteza acestuia,  $v_O$
  - c. oarecare aparținând corpului sau sistemului și a cărei viteză depinde de tipul mișcării
6. Formula Koenig pentru energia cinetică are expresia (explicați semnificația fiecărui termen din expresia respectivă):
- a.  $E = \frac{I}{2} M v_0^2 + E_0 + M \bar{v}_0 \bar{v}_C$
  - b.  $E = \frac{I}{2} M v_0^2 + E_0$
  - c.  $E = \frac{I}{2} M v_C^2 + E_C$
7. Energia cinetică pentru corpul în mișcare plan paralelă are expresia:
- a.  $E = \frac{I}{2} M v_0^2 + \frac{I}{2} J_{\Delta O} \omega^2$
  - b.  $E = \frac{I}{2} M v_C^2 + \frac{I}{2} J_{\Delta C} \omega^2$
  - c.  $E = \frac{I}{2} J_I \omega^2$
8. Care din formele teoremei momentului cinetic este corectă:
- a. în mișcarea față de un punct fix  $O_I$   $\dot{\bar{K}}_I = \bar{M}_I$
  - b. în mișcarea față de centrul de greutate  $C$   $\dot{\bar{K}}_C = \bar{M}_C$
  - c. a. și b.
9. Energia mecanică a unui sistem material se conservă când:
- a. forțele interioare sistemului sunt forțe conservative
  - b. forțele exterioare sistemului sunt forțe conservative
  - c. toate forțele sunt conservative
10. Condiția ca un rotor să fie echilibrat este ca:
- a. centrul de greutate al rotorului să fie situat pe axa de rotație
  - b. momentele centrifugale relative la axa de rotație să fie nule
  - c. a. și b.



## BIBLIOGRAFIE

1. Angot, A., *Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și telecomunicații*, Editura Tehnică, București, 1965.
2. Arnold, V., I., *Metodele matematice ale mecanicii clasice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
3. Atanasiu, M., *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
4. Bălan, Șt., *Culegere de probleme de mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
5. Beer, F., Johnston, R., E., Jr., *Mecanica vectorial para ingenieros*, Tom.1 - Estatica, Impresa in Mexico, 1970.
6. Buzdugan Gh., Fetcu L., Radeș M., *Vibrații mecanice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
7. Constantinescu, I., Bolog, C., *Macanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
8. Démidovich, B., Maron, I., *Éléments de calcul numerique*, Éditions Mir, Moscou, 1973.
9. Duc, J., Bellet, D., *Mecanique des solides réels*, Editions Toulouse, 1984.
10. Harris, C., Crede, C., *Șocuri și vibrații*, Vol.1 și Vol.2, Editura Tehnică, București, 1968.
11. Higdon, A., Stiles, W. B., *Engineering Mechanics – Statics and Dynamics*, Prentice Hall of India, New Delhi, 1975.
12. Iacob, C., *Mecanica teoretică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
13. Landau, L., Lifșit, F., *Mecanica*, Editura Tehnică, București, 1966.
14. Mangeron, D., Irimiciuc, N., *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, Vol.1, 1978, Vol.2, 1980, Vol.3, 1981, Editura Tehnică, București.
15. Matulea, I., *Mecanica*, Vol.1 - *Statica și Cinematica*, Vol.2 – *Dinamica*, Vol.3 – *Mecanica analitică*, Universitatea din Galați, 1978.
16. Matulea, I., Strat, I., Popa, V., *Mecanica - Culegere de probleme*, Vol.1 – *Statica*, Vol.2 – *Cinematica*, Vol.3 – *Dinamica*, Universitatea din Galați, 1986.
17. Mechtcherski, I., V., *Recueil de problèmes de mécanique rationnelle*, Éditions Mir, Moscou, 1973.
18. Mușat S., *Vibrații mecanice*, Universitatea din Galați, 1986.
19. Newton, I., *Principiile matematice ale filozofiei naturale*, Editura Academiei, București 1956.
20. Nowacki, W., *Dinamica sistemelor elastice*, Editura Tehnică, București, 1969.
21. Rădoi, M., Deciu, E., *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
22. Ripianu, A., Popescu, P., Bălan, B., *Mecanică tehnică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
23. Șabac, I., *Matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
24. Sarian M., Boiangiu D., Voiculescu, D., *Probleme de mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
25. Silaș, Gh., Groșanu, I., *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
26. Stan, A., Grumăzescu, M., *Probleme de mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
27. Stoenescu, A., Ripianu, A., Atanasiu, M., *Culegere de probleme de mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
28. Targ, S., *Éléments de mécanique rationnelle*, Éditions Mir, Moscou, 1975.
29. Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R., *Mecanica teoretică*, Editura Tehnică, București, 1968.
30. Voinaroski, R., *Mecanica teoretică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968.
31. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceașu, V., *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
32. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceașu, V., *Mecanica*, Editura Academiei, București, 1989.